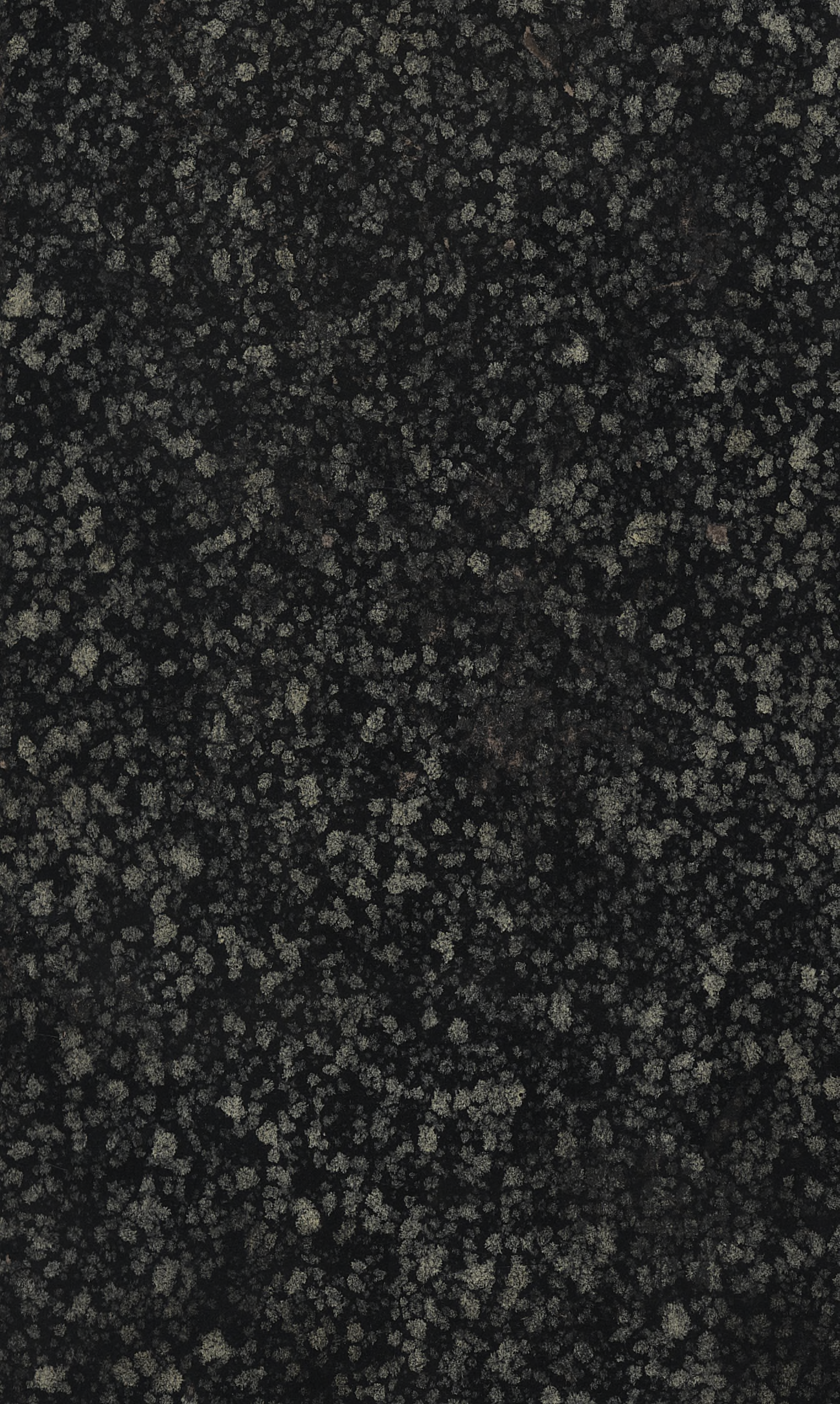
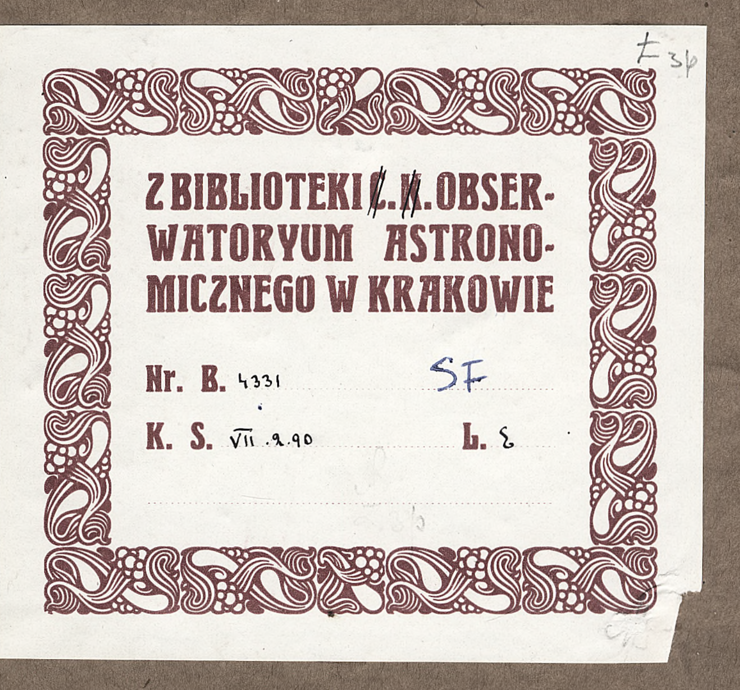
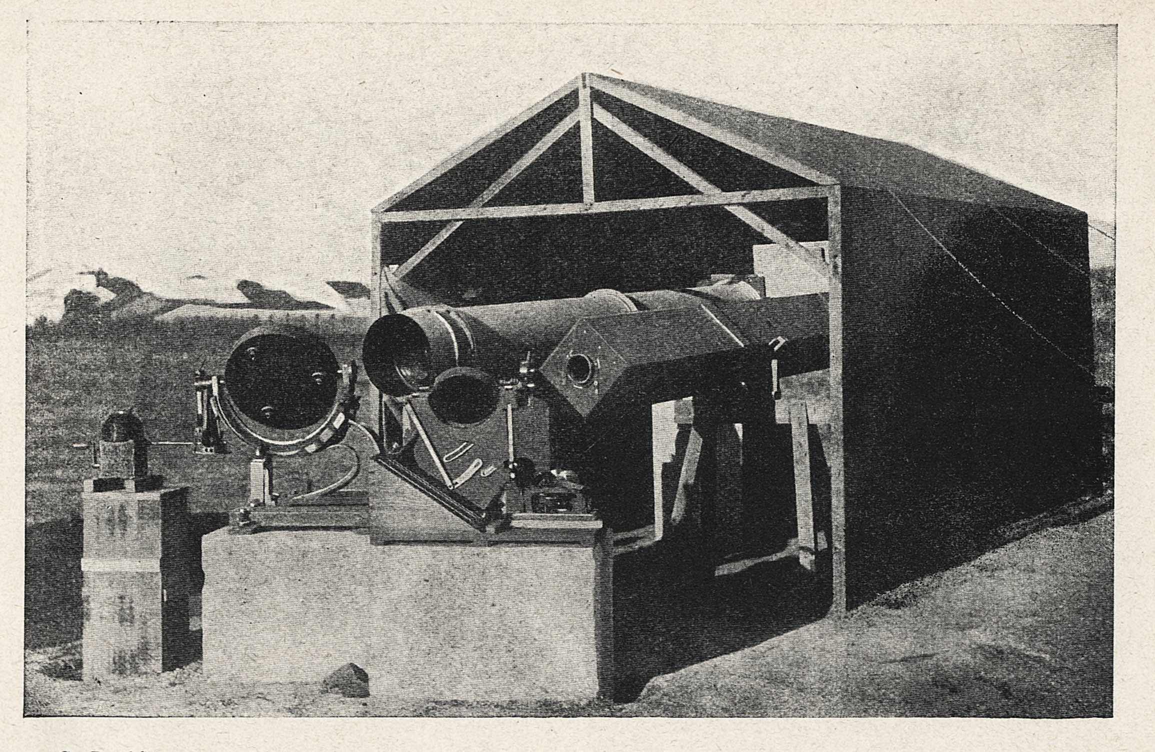




ESPACE, TEMPS

ET

GRAVITATION



C. Davidson *(Voir page 146)*

INSTRUMENTS D'OBSERVATION UTILISÉS A SOBRAL POUR L'ÉCLIPSE DU 29 MAI 1919

A. S. EDDINGTON
PROFESSEUR D'ASTRONOMIE A L'UNIVERSITÉ DE CAMBRIDGE

ESPACE, TEMPS ET GRAVITATION

LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALISÉE DANS SES GRANDES LIGNES

EXPOSÉ RATIONNEL

SUIVI D'UNE ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE LA THÉORIE

OUVRAGE TRADUIT DE L'ANGLAIS PAR

J. ROSSIGNOL

ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

AVEC UNE INTRODUCTION DE

P. LANGEVIN

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE J. HERMANN
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1921

Perhaps to move
His laughter at their quaint opinions wide
Hereafter, when they come to model heaven
And calculate the stars : how they will wield
The mighty frame : how build, unbuild, contrive
To save appearances.

Paradise Lost

INTRODUCTION

Dès que m'est parvenu ce Livre où M. Eddington réussit à exposer de manière à la fois si simple, si vivante et si personnelle la merveilleuse transformation que le génie d'Einstein a introduite dans les conceptions les plus fondamentales de la Physique, j'ai pensé qu'une traduction en devait être faite pour permettre au public français de partager la joie que sa lecture m'avait fait éprouver.

Une démarche immédiate m'apprit que l'initiative avait été prise quelques jours plus tôt par M. Jean Becquerel et que le travail était commencé dans les conditions les plus favorables puisque je n'aurais pu proposer un meilleur choix que celui de M. Rossignol pour le traducteur, et que M. Eddington voulait bien s'assurer lui-même que les nuances, souvent délicates, de sa pensée seraient fidèlement rendues. De plus, l'auteur devait écrire spécialement pour l'édition française un complément mathématique dans lequel la curiosité éveillée par la première partie de l'Ouvrage trouverait, pour se satisfaire, non seulement l'essentiel de l'excellent *Report on the Relativity Theory of Gravitation* présenté quelques mois auparavant par M. Eddington à la Société de Physique de Londres, mais encore un exposé nouveau de l'importante extension apportée récemment par M. Weyl, à la théorie de relativité généralisée, dans le domaine de l'électromagnétisme.

Ainsi se trouvera représentée ici, sous son triple aspect, théorique, expérimental et littéraire, la remarquable et féconde activité que M. Eddington, justement enthousiaste, a mise au service de la théorie d'Einstein, depuis qu'au travers et au-dessus des fumées et du bruit de la guerre, la nouvelle nous est parvenue du succès définitif des efforts

soutenus ces dernières années, pour pénétrer le mystère de la gravitation, par celui dont le nom représentera le moment le plus important depuis Copernic et Newton dans le développement de notre compréhension du monde.

Le jeune professeur de Cambridge était déjà bien connu par d'importants travaux d'astronomie physique et venait, en particulier, de renouveler entièrement notre conception de l'équilibre intérieur des étoiles en montrant le rôle essentiel qu'y joue la pression de radiation, lorsque, séduit à la fois par la beauté intérieure de la construction d'Einstein et par la première confirmation qu'apportait l'explication du mouvement de Mercure, il voulut consacrer une grande part de son activité au développement de l'œuvre nouvelle et, tout d'abord, la juger en vérifiant la conséquence inattendue relative à la déviation de la lumière dans le champ de gravitation du Soleil.

C'est grâce à lui que furent organisées, dans des conditions difficiles, les deux expéditions de Sobral et de l'île du Prince qui devaient, par l'observation de l'éclipse du 29 Mai 1919, confirmer la prévision d'Einstein et provoquer le mouvement actuel de surprise et d'attention généralisée.

Il dirigea lui-même l'expédition de l'île du Prince et nous devons à cette circonstance, non seulement une grande part du succès de l'entreprise, mais encore la relation si colorée qu'il en donne au septième Chapitre de ce Livre sous le titre expressif : *Weighing Light.*

Sa conviction faite, il entreprit l'œuvre de propagande en Angleterre, d'abord dans les milieux scientifiques par son Rapport à la Société de Physique de Londres, et de nombreuses communications et discussions devant la Société Astronomique et la Société Royale, puis, dans un cercle plus étendu par l'exposé ici traduit, rédigé pour satisfaire, de manière aussi brillante qu'originale, la curiosité d'un public non spécialisé.

Enfin, sa contribution personnelle devient de plus en plus importante du côté théorique, et nous lui devons, tout récemment, la généralisation la plus complète qu'on ait tentée jusqu'ici de cette géométrie nouvelle dans laquelle semble devoir s'absorber la Physique tout entière.

*
* *

J'aurais jugé bien inutile de présenter aux lecteurs de langue française un livre et un auteur qui se recommandent si bien d'eux-mêmes si je n'y avais trouvé l'occasion de dire que, grâce aux mesures récentes de M. Pérot d'une part, de MM. Buisson et Fabry d'autre part, nous pouvons considérer comme définitive la confirmation expérimentale quantitative du troisième criterium prévu pour sa théorie par M. Einstein, le déplacement vers le rouge des raies du spectre solaire par rapport aux raies correspondantes émises par les sources terrestres.

Ainsi se trouvent vérifiées de manière complète les trois conséquences, mouvement du périhélie des planètes, déviation de la lumière par le Soleil, déplacement des raies spectrales, annoncées par Einstein dont la merveilleuse organisation de physicien lui permet de ne pas cesser de voir la réalité concrète alors que son esprit se meut librement dans les régions les plus abstraites de la spéculation théorique. Ces mêmes qualités lui firent, il y a quinze ans, tout au début de sa carrière, prévoir l'existence et donner pour la première fois les lois précises du mouvement Brownien, connu depuis longtemps et dont il n'avait pas entendu parler.

A ce faisceau de preuves vient s'ajouter, en dehors de l'argument tiré de sa force logique, le fait que la théorie nouvelle est solidement appuyée dans le passé sur tout le développement de la théorie électromagnétique, imposé par l'expérience, et dont elle représente l'aboutissement nécessaire.

En face de la théorie mécaniste, fondée sur les notions d'espace euclidien et de temps absolu, ainsi que sur les lois, adéquates à cette dernière notion, d'action instantanée à distance, s'est élevée au cours du XIXe siècle, la théorie électromagnétique de Faraday, de Maxwell et de Lorentz. Elle représente le point de vue opposé des actions transmises de proche en proche avec une vitesse finie, celle de la lumière.

L'opposition formelle, la contradiction absolue entre les deux théories, que des efforts puissants ont vainement essayé de concilier, s'est manifestée de manière particulièrement aiguë lorsqu'il s'est agi d'expliquer le résultat négatif des expériences tentées pour mettre en évidence le mouvement de translation variable de la Terre par rapport au milieu qui transmet les actions électromagnétiques et les ondes lumineuses. Il est alors apparu nettement que les deux théories sont inconciliables parce qu'elles correspondent à des cinématiques différentes, à des conceptions différentes du temps et de l'espace.

La synthèse mécaniste implique la notion du temps absolu, où la simultanéité a un sens absolu, indépendant du mouvement de l'observateur, mais impossible à définir et à contrôler expérimentalement puisque ce contrôle exigerait la réalisation de signaux effectivement instantanés à distance. La synthèse électromagnétique au contraire, se concilie admirablement avec le principe de relativité à condition d'admettre le caractère relatif de la simultanéité et l'emploi du temps optique, nettement expérimental puisque la concordance des temps en des lieux différents s'y obtient par l'échange, effectivement réalisable, de signaux lumineux ou hertziens.

L'abandon de la notion du temps absolu, non seulement introduit l'ordre et la clarté dans toute l'électrodynamique et l'optique des corps en mouvement, mais encore exige l'abandon de la masse absolue et aboutit à une dynamique nouvelle, admirablement confirmée par les faits et s'écartant d'autant plus de la dynamique ancienne que la vitesse du mobile cesse d'être négligeable devant celle de la lumière.

La relativité restreinte ainsi confirmée ne concerne que les mouvements de translation uniformes. Einstein vit nettement la nécessité de l'étendre aux mouvements quelconques, d'énoncer les lois de la physique sous une forme indépendante du mouvement des observateurs. Il s'aperçut bien vite qu'en même temps on obtenait de façon naturelle la solution du mystère de la gravitation à condition de renoncer à cet autre absolu qu'est le caractère euclidien de la géo-

métrie. La loi de gravitation nouvelle, remplaçant celle de Newton, exprime simplement, sous une forme indépendante du mouvement des observateurs, la manière dont la courbure de l'espace-temps, son écart à partir du caractère euclidien, est déterminée par la matière présente.

A chaque abandon d'un absolu arbitraire correspond ainsi une généralisation nouvelle et un progrès dans la synthèse physique. Les résultats remarquables obtenus par M. Weyl et par M. Eddington lui-même dans l'interprétation géométrique de l'électromagnétisme montrent que de nouveaux succès sont à prévoir dans cette même direction.

Mai 1921.

P. LANGEVIN.

PREFACE DE L'EDITION ANGLAISE.

Par sa théorie de la relativité, Albert Einstein a révolutionné la pensée scientifique en physique.

Les points fondamentaux de son œuvre sont les suivants : Il a réussi à séparer incomparablement mieux qu'on ne l'avait fait jusqu'alors la part de l'observateur et celle de la nature dans les phénomènes observables. La perception d'un objet par un observateur dépend de sa propre situation et des conditions dans lesquelles il observe ; ainsi, pour prendre un exemple simple, un accroissement de distance lui fera paraître l'objet plus petit et moins net. Nous corrigeons presque inconsciemment nos perceptions en interprétant ce que nous percevons. Mais nous en sommes arrivés maintenant à un point où nous pouvons constater que les corrections faites par l'observateur pour tenir compte de son *mouvement* ont toujours été par trop grossières. La question ne s'était guère posée, parce qu'en pratique tous les observateurs avaient sensiblement le même mouvement, celui de la Terre. L'espace et le temps physiques ont été trouvés étroitement liés à ce mouvement de l'observateur ; ils n'ont pu conserver une individualité dans l'Univers extérieur à nous que mêlés l'un à l'autre d'une manière assez intime pour rendre leur combinaison parfaitement homogène. Quand nous avons fait refluer cet espace et ce temps jusqu'à leur propre source — l'observateur —, l'Univers qui reste nous apparaît sous un jour étrange auquel nous ne sommes pas accoutumés ; en réalité, il se trouve simplifié et les phénomènes fondamentaux présentent une unité qui, habituellement, nous est cachée. Les résultats déduits de ce nouveau point de vue et soumis au contrôle de l'expérience ont tous reçu, à une exception douteuse près, une confirmation éclatante.

Mon but est de donner de cette œuvre un exposé débarrassé de tout caractère technique d'ordre mathématique, physique

ou philosophique. Malgré tout, les nouvelles conceptions de l'espace et du temps, si contraires à nos habitudes, imposent une certaine gymnastique à l'esprit qui veut les saisir. Les résultats nous semblent étranges et prennent même quelquefois un aspect humoristique. Dans les neuf premiers chapitres, nous essayons de donner un résumé clair d'une théorie admise dans ses caractères généraux par une école nombreuse et chaque jour croissante de physiciens — il est possible du reste qu'aucun d'eux n'accepte les vues de l'auteur de ces lignes sur la signification de cette théorie. Les Chapitres X et XI portent sur des sujets tout nouveaux à l'égard desquels l'opinion n'a pas encore pris positivement position. Quant au dernier Chapitre, il renferme les idées de l'auteur sur l'interprétation de la nature ; on y peut trouver les éléments d'un système philosophique ; ce serait donc, je crois, trop de témérité que d'espérer sur ce Chapitre autre chose qu'une controverse.

Tout exposé non mathématique est nécessairement soumis à des limitations. Le lecteur qui désirerait savoir exactement comment tel ou tel résultat se déduit de la loi de gravitation d'Einstein ou de celle de Newton doit avoir recours aux traités mathématiques spéciaux. Mais cette limitation dans la forme de l'exposé est peut-être moins sérieuse que la limitation de son exactitude. Il y a une relativité de la vérité, comme il y en a une de l'espace. —

« For IS and IS-NOT though *with* Rule and Line
And UP-AND-DOWN *without*, I could define ». [1]

Hélas ! Ce n'est pas aussi simple. Nous pouvons bien débarrasser les phénomènes de tout ce qui est relatif à la position et au mouvement de l'observateur, mais pouvons-nous également les affranchir de ce qui tient à l'imagination bornée du cerveau humain ? Je crois que nous le pouvons, mais seulement au moyen du symbolisme mathématique. Le langage du poète est plein de subtilités qui échappent aux explications maladroites de ses commentateurs, de même la géométrie de la relativité

[1] « Pour définir l'ÊTRE et le NON-ÊTRE j'ai besoin de commentaires.
Et puis m'en passer pour le HAUT et le BAS »

présente une harmonie parfaite adéquate à la nature et que ne peut atteindre mon interprétation grossière.

Mais l'esprit ne saurait se contenter de laisser à la Vérité l'aspect trop aride que lui donnent les symboles mathématiques ; il la lui faut traduite en images familières. Il nous est permis de demander au mathématicien qui manie les x avec tant de facilité, non pas évidemment la signification indéchiffrable de ses symboles dans la nature, mais le sens qu'il leur attribue *lui-même.*

Ce Livre est avant tout destiné à ceux qui n'ont aucune connaissance technique sur ce sujet, mais nous espérons qu'il trouvera tout de même quelque faveur auprès de ceux qui ont déjà étudié la théorie. Un certain nombre de notes ont été ajoutées sous forme d'Appendice pour combler partiellement la lacune qui sépare cet Ouvrage des traités mathématiques et pour établir les points de contact entre le raisonnement du texte et le développement analytique correspondant.

Il m'est impossible de dire exactement combien je dois à la littérature contemporaine. Les écrits d'Einstein, Minkowski, Hilbert, Lorentz, Weyl et bien d'autres m'ont servi de base ; des discussions avec des amis ou des correspondants m'ont peu à peu indiqué les développements nécessaires.

A.-S. Eddington.

1er Mai 1920.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre IX.

Chapitre X.

Chapitre XI.

Chapitre XII.

Appendice.

PROLOGUE

Qu'est-ce que la Géométrie ?

Une conversation entre :
un Physicien expérimental ;
un Mathématicien pur ;
un Relativiste, défenseur des plus nouvelles conceptions du Temps et de l'Espace dans les Sciences physiques.

Le Relativiste. — Une proposition d'Euclide bien connue nous apprend que « la somme des longueurs de deux côtés quelconques d'un triangle est supérieure à la longueur du troisième côté ». L'un de vous deux peut-il me dire si nous avons aujourd'hui de bonnes raisons de croire à son exactitude ?

Le Mathématicien. — Pour ma part, j'avoue être totalement incapable de dire si elle est vraie ou non. Je puis, par des raisonnements dignes de toute confiance, la déduire de certaines autres propositions ou axiomes que l'on suppose être d'un caractère encore plus élémentaire. Si ces axiomes sont vrais, la proposition est vraie, sinon sa vérité n'est pas universelle. Quant à me prononcer sur leur exactitude rigoureuse, je ne le peux pas et c'est une question qui n'est plus de mon département.

Le Physicien — Mais, la vérité de ces axiomes, n'a-t-on pas le droit de la considérer comme évidente ?

Le Mathématicien. — C'est une évidence qui n'existe nullement pour moi et je crois que c'est là un droit que l'on a généralement abandonné.

Le Physicien. — Pourtant, puisque vous avez pu bâtir sur ces axiomes un système de géométrie logique et cohérent, n'est-ce pas là une preuve indirecte de leur exactitude ?

Le Mathématicien. — Non ! La géométrie euclidienne n'est pas le seul système cohérent. En choisissant un autre groupe d'axiomes on arrive par exemple à la géométrie de Lobatchewsky dans laquelle nombre de propositions de la géométrie d'Euclide sont inexactes. A mon point de vue nous n'avons pas plus de raisons de choisir une de ces géométries qu'une autre.

Le Relativiste. — Comment se fait-il alors que la géométrie euclidienne soit de beaucoup le système le plus important ?

Le Mathématicien. — Personnellement, je suis peu disposé à admettre que ce soit le plus important. Mais pour des raisons que je déclare ne pas comprendre, mon ami le Physicien porte un intérêt plus grand à la géométrie euclidienne qu'à toute autre. Comme c'est sans cesse dans ce système qu'il nous pose ses problèmes, nous lui avons par suite apporté une attention exagérée. Il y a eu cependant de grands géomètres comme Riemann qui ont fait quelque chose pour rétablir une mise au point convenable.

Le Relativiste (au Physicien). — Pourquoi portez-vous un tel intérêt à la géométrie euclidienne ? Pensez-vous donc que c'est elle la vraie ?

Le Physicien. — Oui, car nos expériences le prouvent.

Le Relativiste. — Comment, par exemple, pouvez-vous prouver que les deux côtés d'un triangle ont une somme supérieure au troisième côté ?

Le Physicien. — Je ne puis évidemment le prouver qu'en prenant un très grand nombre de cas typiques et je suis limité par les erreurs inévitables d'expérience. Mes preuves ne sont, ni aussi générales, ni aussi parfaites que celles du mathématicien pur. Mais c'est un principe reconnu en physique que la généralisation nous est permise quand nous partons d'un nombre suffisamment grand d'expériences, et ce genre de preuve me satisfait pleinement.

Le Relativiste. — Il me satisfera également. Je n'ai besoin d'examiner avec vous qu'un cas particulier. Voici un triangle

ABC ; comment me prouverez-vous que AB + BC est supérieur à AC ?

Le Physicien. — Je prendrai une règle graduée et je mesurerai les trois côtés.

Le Relativiste. — Mais il me semble que nous parlons de choses différentes. Il était question d'une proposition géométrique — une propriété de l'espace et non de la matière. Votre preuve expérimentale nous démontre seulement comment se comporte une règle matérielle quand vous lui donnez différentes directions.

Le Physicien. — Je puis m'arranger de façon à faire les mesures à l'aide d'un procédé optique.

Le Relativiste. — C'est tomber de Charybde en Scylla ; vous faites maintenant intervenir les propriétés de la lumière.

Le Physicien. — Je ne peux en effet rien vous prouver si vous ne me laissez faire aucune mesure. La mesure est pour moi le seul moyen de trouver les lois de la nature. Je ne suis pas un métaphysicien.

Le Relativiste. — Alors, voici ce qui nous mettra d'accord : par *longueur* et *distance* vous entendez toujours une quantité obtenue par des mesures faites à l'aide de procédés matériels ou optiques. Vous avez étudié expérimentalement les lois auxquelles obéissent ces *longueurs mesurées* et trouvé la géométrie dont elles dépendent. Cette géométrie nous l'appellerons la « *géométrie naturelle* » ; évidemment elle a pour vous une importance beaucoup plus grande que n'importe lequel des systèmes imaginés par les mathématiciens. Mais il ne faut pas oublier que son sujet n'est autre que l'étude de la manière dont se comportent les règles matérielles —c'est-à-dire les propriétés de la matière. Ses lois ont le degré d'exactitude de beaucoup de lois physiques, les lois de l'électromagnétisme par exemple.

Le Physicien. — Voulez-vous dire que vous comparez l'espace à une sorte de champ magnétique ? C'est à peine si je vous comprends.

Le Relativiste. — Il vous est impossible, dites-vous, d'explorer l'Univers sans quelque appareil. L'explorez-vous avec une règle graduée, vous trouvez la géométrie naturelle ; avec une aiguille aimantée, vous découvrez le champ magnétique. Ce que nous pouvons appeler le champ d'extension ou champ-espace est une qualité physique au même titre que le champ magnétique. Vous pouvez, si vous le voulez, supposer que ces champs coexistent dans l'éther. Leurs lois doivent être déterminées par l'expérience. Bien entendu, certaines lois approchées du champ-espace (géométrie euclidienne) nous sont familières depuis notre enfance ; mais il faut nous débarrasser de cette idée que ces lois ont un caractère de nécessité absolue et qu'il serait impossible de trouver en d'autres lieux de l'Univers, des champs-espaces où elles ne s'appliqueraient plus. Jusqu'à quel point l'espace ressemble-t-il réellement à un champ magnétique ? Voilà un sujet sur lequel on peut dogmatiser et c'est ce que je ne veux pas faire. Le point capital pour moi est qu'ils se présentent tous deux d'une manière presque identique à l'investigation expérimentale.

Examinons maintenant les lois de la géométrie naturelle. J'ai un ruban pour faire mes mesures et voici le triangle : AB = = 39 1/2 cm. ; BC = 1/8 cm. ; AC = 39 7/8 cm. Eh bien ! votre proposition est en échec !

Le Physicien. — Vous savez fort bien d'où vient l'erreur. Vous avez tendu fortement le ruban quand vous avez mesuré AB.

Le Relativiste. — Mais, n'ai-je pas le droit de le faire ?

Le Physicien. — Evidemment non ! Une longueur doit être mesurée avec une règle rigide.

Le Relativiste. — Voilà une addition importante à la définition d'une longueur. Mais qu'est-ce qu'une règle rigide ?

Le Physicien. — Une règle qui garde toujours la même longueur.

Le Relativiste. — Nous venons de définir une longueur comme une quantité obtenue avec une règle rigide ; il vous faut donc une autre règle pour voir si votre première règle change

de longueur ; et une troisième pour vérifier la deuxième ; et ainsi de suite, *ad infinitum*. Vous me faites souvenir de l'anecdote de l'horloge et du canon à temps en Egypte. L'homme chargé du canon fait feu en se réglant sur l'horloge et l'homme chargé de l'horloge la règle sur le canon. Non, vous ne devez pas définir une longueur au moyen d'une règle rigide que vous définirez elle-même au moyen d'une longueur.

Le Physicien. — J'admets que mes définitions ne sont pas très nettes. On n'a pas le temps de tout faire et il y a tant de choses à découvrir en physique, qui retiennent mon attention ! Mais vous-même êtes-vous sûr de la définition logique de tous les termes que vous employez ?

Le Relativiste. — Le ciel m'en préserve ! Je ne suis pas naturellement porté à être exigeant sur ce point ! Bien que je sache apprécier le travail de ceux qui creusent les fondations de la Science, c'est surtout vers la superstructure que se porte mon intérêt personnel. Pourtant, si parfois nous voulons ajouter un étage supplémentaire, il est nécessaire de rendre les fondations plus solides. J'ai un but bien défini en essayant d'obtenir le sens exact de cette notion de la longueur. Une théorie nouvelle et singulière se développe à laquelle vous pouvez trouver des objections de principe, et vous n'aimeriez certainement pas que vos idées soient prises en défaut.

Et d'ailleurs, quand vous prétendez déterminer des longueurs avec huit chiffres significatifs, cela implique certainement que vous avez un criterium bien défini pour l'exactitude de vos mesures.

Le Physicien. — Evidemment il est difficile de préciser ce que nous entendons par rigide ; mais en pratique nous pouvons dire si une règle est de nature à changer de longueur d'une manière appréciable dans des circonstances diverses.

Le Relativiste. — Non. N'introduisez pas cette idée d'un changement de longueur possible quand il s'agit de l'appareil même qui doit définir la longueur. Il est évident que l'étalon de longueur adopté ne peut, quelle que soit sa nature, changer de longueur. Si l'on définit le mètre comme la longueur d'une certaine barre, cette barre ne peut jamais avoir une autre lon-

gueur qu'un mètre. Si nous affirmons que cette barre change de longueur, c'est que manifestement nous avons changé notre définition du mètre. Vous m'avez dit que mon ruban était défectueux — qu'il n'était pas rigide. Peut-être, mais non pas parce qu'il changeait de longueur — car étant étalon, sa longueur était invariable — mais parce qu'il lui manquait quelque autre qualité.

Vous reconnaissez si une règle est approximativement rigide quand vous la voyez. Ce que vous lui comparez ce n'est pas quelque longueur idéale non mesurable, mais un étalon matériel idéal que l'on puisse atteindre ou du moins dont on puisse approcher autant qu'on le veut. Les règles ordinaires ont des défauts — flexion, dilatation thermique, etc. — dont on peut diminuer la grandeur en prenant des précautions convenables ; la limite vers laquelle vous tendez à mesure que les défauts diminuent, constitue votre règle rigide. Vous pouvez déterminer ces défauts sans faire appel à quelque définition étrangère de la longueur ; si, par exemple, vous avez deux tiges de même matière, les extrémités de chacune d'elles étant exactement au contact de celles de l'autre, et si l'une d'elles est chauffée, les extrémités ne peuvent plus être amenées à coïncider et l'on dit que la matière possède un coefficient de dilatation thermique. Vous pouvez ainsi comparer expérimentalement les coefficients de dilatation des différents métaux et les ranger par ordre de grandeur décroissante. De cette manière vous pouvez spécifier la nature de votre règle rigide idéale avant même d'introduire le mot « longueur ».

Le Physicien. — Sans aucun doute, c'est bien ainsi qu'on devrait le définir.

Le Relativiste. — Nous devons alors reconnaître que toute notre connaissance de l'espace repose sur la manière dont se comportent nos règles graduées matérielles, quand on suppose éliminés certains défauts, bien définis, de constitution.

Le Physicien. — Je ne suis pas sûr d'être d'accord avec vous, car nous percevrons certainement le caractère d'exactitude ou d'inexactitude d'une relation telle que $AB = 2\ CD$, même si nous n'avons pas imaginé une règle graduée matérielle ; nous

pouvons par exemple dire qu'il y a deux fois plus de papier entre A et B qu'entre C et D.

Le Relativiste. — Oui, pourvu que le papier soit uniforme. Mais alors que signifie l'uniformité du papier ? Qu'une longueur donnée en contient toujours la même quantité ; nous revenons à la nécessité de définir la longueur. Si au lieu de cela vous dites qu'il y a entre A et B une quantité d' « espace » deux fois plus grande qu'entre C et D la même objection s'applique. Vous imaginez que les intervalles contiennent un espace uniforme. Mais l'uniformité signifie simplement que chaque centimètre de votre règle rigide comprend la même quantité d'espace ; autrement dit, vous avez utilisé votre échelle graduée d'une manière arbitraire pour diviser l'espace en fragments que vous dites égaux. Tout cela nous ramène à la règle rigide.

A mon avis vous aviez raison de dire que toute découverte vous était rendue impossible si l'on vous privait du secours de la mesure ; or, la mesure revient à l'emploi de procédés matériels. Maintenant, vous admettez que vos mesures ne peuvent dépasser un certain ordre d'approximation et que vous ne les avez pas faites dans toutes les conditions possibles. Supposons, par exemple, qu'un sommet de votre triangle soit situé dans un champ de gravitation extrêmement intense — infiniment plus intense que tous ceux dont vous pouvez avoir une connaissance expérimentale. J'ai de bonnes raisons de penser que dans ces conditions il ne serait pas impossible que vos mesures faites avec une règle rigide vous donnent pour somme de deux des côtés du triangle une quantité sensiblement inférieure au troisième côté. Dans ce cas, seriez-vous disposé à rejeter la géométrie euclidienne ?

Le Physicien. — Il serait, à mon avis, risqué de prétendre que la présence du champ de gravitation n'apporte aucune modification dans l'expérience.

Le Relativiste. — Je suppose, au contraire, que la modification est importante.

Le Physicien. — Je veux dire par là que nous pourrions avoir à corriger nos mesures, car l'action d'une force intense

pourrait, peut-être, causer une déformation de la règle graduée.

Le Relativiste. — Pardon, dans une règle rigide vous avez par définition éliminé toute déformation due à un effort.

Le Physicien. — Oui, mais ici le cas est différent. L'allongement de la règle est déterminé par les positions que prennent les molécules sous l'effet des forces qui les sollicitent ; il pourrait y avoir, de leur part, comme une réponse au champ de gravitation qui serait commune à toutes les espèces possibles de matière. On pourrait à peine regarder cela comme un défaut et notre règle dite rigide n'en serait pas plus indépendante que toute autre espèce de matière.

Le Relativiste. — Bien, mais que pensez-vous obtenir en corrigeant vos mesures ? Vous corrigez des mesures quand elles sont fausses par rapport à l'étalon. Vous faites, par exemple, des corrections aux lectures d'un thermomètre à hydrogène pour obtenir les indications correspondantes d'un thermomètre à gaz parfait parce que les molécules d'hydrogène ont des dimensions finies, qu'elles exercent les unes sur les autres des attractions spéciales et que vous préférez prendre pour étalon un gaz idéal composé de molécules infiniment petites. Mais dans le cas actuel, quel étalon concevez-vous quand vous vous proposez de corriger des mesures faites avec une règle rigide ?

Le Physicien. — Je vois la difficulté. Je n'ai aucune connaissance de l'espace en dehors de celle que me fournissent mes mesures et n'ai point d'étalon meilleur que ma règle rigide. Il est alors bien difficile de donner la signification de mesures corrigées ; et pourtant il me semblerait plus naturel de supposer que l'inexactitude de la proposition est due à des mesures mal conduites plutôt qu'à une modification dans le caractère de l'espace.

Le Relativiste. — N'est-ce pas parce que vous êtes encore un peu métaphysicien ? Vous gardez de l'espace une notion qui dépasse vos mesures et vous êtes tout prêt à les rejeter plutôt que de supposer comme une distorsion de cet espace. Même si cette notion que vous avez de l'espace avait quelque raison d'être, pourquoi donc le supposeriez-vous euclidien ?

Votre seule raison de croire que l'espace est euclidien est que jusqu'ici vos expériences vous l'ont montré tel ; si maintenant des mesures faites en certains endroits de l'espace correspondaient à une géométrie non euclidienne, toute raison de le supposer euclidien disparaîtrait. Mathématiquement et logiquement les espaces euclidien et non euclidien sont sur le même plan. Votre préférence pour l'espace euclidien était fondée sur des mesures ; ce sont également des résultats de mesures qui doivent vous conduire à le conserver ou à l'abandonner.

Le Physicien. — Voici mon point de vue. Je crois que mes efforts tendent à mesurer quelque chose appelée longueur qui a un sens absolu dans la nature et qui joue un rôle important dans ses lois. Cette longueur obéit à la géométrie euclidienne. Je crois que mes mesures, faites à l'aide d'un règle rigide, sont exactes quand toute cause de trouble, telle que la gravitation, est éliminée ; on peut au contraire s'attendre à ce que, dans un champ de gravitation, les mesures brutes ne donnent pas rigoureusement le même résultat.

Le Relativiste. — Vous faites donc trois hypothèses : 1° Il y a dans la nature quelque chose d'absolu correspondant à la longueur. 2° La géométrie correspondant à ces longueurs absolues est euclidienne. 3° Les mesures pratiques déterminent ces longueurs d'une manière rigoureuse quand il n'y a pas de force de gravitation. Je ne vois pas la nécessité de ces hypothèses et propose de les supprimer. « *Hypotheses non fingo* ». La deuxième me paraît plus particulièrement prêter à objection. Vous supposez que cette grandeur absolue dans la nature obéit aux lois de la géométrie euclidienne ; mais c'est absolument contraire aux principes scientifiques d'énoncer des lois arbitraires auxquelles doit obéir la nature alors que seule l'expérience nous permet de découvrir ses lois. Ici, il n'y a qu'un résultat expérimental évident, c'est que la longueur mesurée — qui, d'après votre propre hypothèse, n'est pas nécessairement identique à la grandeur absolue — obéit parfois à la géométrie euclidienne et parfois ne lui obéit pas. Il semblerait également raisonnable de mettre en doute votre troisième hypothèse au delà, par exemple, de la sixième décimale ; ce serait alors chercher la ruine de vos expériences les plus soignées et les plus

précises. Mais c'est dans la première hypothèse que mes opinions diffèrent essentiellement des vôtres. Y a-t-il quelque grandeur absolue dans la nature, que nous espérons déterminer quand nous faisons une mesure de longueur ? Quand nous essayons de déterminer le nombre de molécules contenues dans un fragment donné de matière, nous avons à utiliser des méthodes indirectes et des méthodes différentes peuvent donner systématiquement des résultats différents ; personne, pourtant, ne met en doute qu'il y a un nombre bien déterminé de molécules, de sorte qu'il est permis de dire que certaines méthodes sont bonnes théoriquement et d'autres inexactes. Le dénombrement, voilà ce qui nous paraît être une opération absolue. Mais il me semble que les autres opérations physiques ne doivent pas être mises sur le même plan. Toute grandeur physique, telle que la longueur, la masse, la force, etc. — qui n'est pas un nombre pur, ne peut être définie que comme le résultat d'une expérience physique basée sur des règles déterminées.

Ainsi je ne puis concevoir une « longueur » dans la nature, indépendante de la définition du procédé de sa mesure. Quand bien même elle existerait, elle ne doit pas être prise en considération en physique car elle dépasse l'expérience. Bien entendu, il est toujours possible que nous rencontrions quelque grandeur que ne nous donne pas directement l'expérience et qui joue un rôle fondamental dans la théorie. S'il en est ainsi, c'est évidemment elle qui interviendra dans les formules théoriques. Mais il n'est pas bon de supposer l'existence d'une telle grandeur et de poser *a priori* les lois auxquelles elle doit se soumettre en comptant sur un hasard lointain pour prouver son utilité.

Le Physicien. — Alors vous ne voudrez pas que j'accuse la règle graduée si la proposition n'est pas vérifiée ?

Le Relativiste. — Mais si ! La responsable c'est bien elle. La géométrie naturelle n'est autre qu'une théorie de la manière dont se comportent les échelles graduées matérielles. Toute proposition de la géométrie naturelle n'est qu'un énoncé relatif aux propriétés des règles rigides, qui par suite devront recevoir nos reproches ou notre confiance. Mais, n'allez pas dire que la règle rigide est fausse, car cela nécessiterait un étalon juste qui n'existe pas.

Le Physicien. — L'espace dont vous parlez doit être une sorte d'abstraction des propriétés d'extension de la matière.

Le Relativiste. — Parfaitement ! Et quand je vous demande de bien vouloir considérer que cet espace peut être non euclidien, je n'exige pas de vous un effort d'imagination extraordinaire ; je veux simplement dire que les propriétés d'extension de la matière sont soumises à des lois un peu modifiées. Chaque fois que nous cherchons expérimentalement les propriétés de l'espace, ce sont ces propriétés d'extension que nous trouvons. Il paraît donc logique de conclure que l'espace, tel que nous le connaissons, doit être une abstraction de ces propriétés matérielles et non quelque Inconnu d'un caractère plus transcendant. Les nouvelles méthodes de l'enseignement de la géométrie dans les écoles devraient être entièrement condamnées et ce serait induire les élèves en erreur que de leur faire vérifier les propositions géométriques par des mesures, si l'espace qu'on leur fait étudier n'avait pas cette signification.

Je devine chez vous un doute ; vous ne croyez pas que cette abstraction des propriétés d'extension de la matière réponde complètement à votre conception générale de l'espace ; et, comme une nécessité de la pensée, vous exigez quelque chose au-delà. Je ne pense pas qu'il soit nécessaire d'aller bouleverser cette conception pourvu que vous admettiez qu'il ne s'agit pas des propriétés de cet Inconnu d'un caractère plus transcendant, quand nous décrivons une géométrie comme euclidienne ou non euclidienne.

Le Mathématicien. — Cette thèse a été amplement développée que l'espace n'est ni physique, ni métaphysique, mais uniquement conventionnel. Voici un passage de Poincaré, dans « La Science et l'Hypothèse », qui traduit cette nouvelle forme de l'idée d'espace :

« Si la géométrie de Lobatchewsky est vraie, la parallaxe d'une « étoile très éloignée sera finie ; si celle de Riemann est vraie, « elle sera négative. Ce sont là des résultats qui semblent acces- « sibles à l'expérience et on a espéré que les observations astro- « nomiques pourraient permettre de décider entre les trois géo- « métries. Mais ce qu'on appelle la ligne droite, en astrono- « mie, c'est simplement la trajectoire du rayon lumineux. Si

« donc, par impossible, on venait à découvrir des parallaxes « négatives, ou à démontrer que toutes les parallaxes sont supé- « rieures à une certaine limite, on aurait le choix entre deux « conclusions : nous pourrions renoncer à la géométrie eucli- « dienne ou bien modifier les lois de l'optique et admettre que « la lumière ne se propage pas rigoureusement en ligne droite. « Inutile d'ajouter que tout le monde regarderait cette solution « comme la plus avantageuse. La géométrie euclidienne n'a « donc rien à craindre d'expériences nouvelles ».

Le Relativiste. — Cet exposé remarquable nous est d'un grand secours pour nous aider à comprendre le problème que nous envisageons actuellement. Poincaré met en lumière cette dépendance qui existe entre les lois de la géométrie et celles de la physique, dépendance que nous ne devons jamais perdre de vue. Nous pouvons ajouter à un des groupes de lois, celles que nous enlevons à l'autre. J'admets que l'espace est conventionnel — d'ailleurs le sens de tout mot d'une langue ne l'est-il pas ? Mais nous voici maintenant en présence de ce dilemme dont parle Poincaré bien que l'expérience cruciale ne soit pas précisément celle qu'il expose. Après avoir pesé le pour et le contre, je choisis la solution que l'on considère généralement, c'est du moins l'opinion de Poincaré, comme la moins avantageuse. L'espace ainsi choisi, je l'appelle *espace physique* et sa géométrie, la *géométrie naturelle,* tout en admettant la possibilité d'autres significations conventionnelles de l'espace et de sa géométrie. S'il n'y avait là que la seule question de la signification du mot « espace » — mot bien vague par lui-même — ces autres significations possibles pourraient présenter des avantages ; mais c'est que la signification attribuée aux notions de longueur et de distance marche de pair avec celle de l'espace ; et nous avons maintenant des grandeurs que le physicien a l'habitude de mesurer avec la plus grande exactitude ; elles sont fondamentales dans l'ensemble de notre connaissance expérimentale du monde. Nous avons des notions sur ce que l'on peut appeler l'étendue de l'Univers stellaire et, quelle que soit leur valeur par rapport à la réalité définitive, elles ne sont pas qu'une pure et simple description de la manière de localiser nos observations dans un espace mathémati-

que conventionnel et arbitraire. Devons-nous nous priver des termes dans lesquels nous avons l'habitude d'exprimer ces notions ?

La loi de Mariotte établit que la pression d'un gaz est proportionnelle à sa densité. Or l'expérience montre que cette loi n'est vraie que d'une manière approchée. On gagnerait évidemment une certaine simplicité mathématique en définissant de nouveau conventionnellement le mot *pression* de manière que la loi de Mariotte soit rigoureusement vraie. Mais ce serait faire preuve d'un absolutisme exagéré que de fixer ainsi le sens du mot « pression », ou alors il faudrait être bien sûr que le physicien n'aurait plus jamais à faire usage du sens primitif du mot.

Le Physicien. — J'ai une autre objection à présenter. En dehors de la mesure nous avons une perception générale de l'espace et cet espace que nous percevons est, au moins approximativement, euclidien.

Le Relativiste. — Nos perceptions ne sont que des mesures grossières et l'on a raison de dire que les mesures optiques faites à l'aide de nos yeux entrent pour une large part dans notre perception de l'espace. Si dans un champ de gravitation intense les mesures optiques et mécaniques conduisaient à des résultats divergents, il nous faudrait choisir l'étalon le plus avantageux et ensuite ne plus le quitter. Pourtant, si loin que nous puissions en faire la constatation, ces mesures donnent des résultats concordants et par conséquent aucune difficulté ne se présente. Si donc les mesures physiques nous révèlent un espace non euclidien, l'espace de notre perception sera également non euclidien. Si vous vous trouviez placé dans un champ de gravitation extrêmement intense, vous devriez percevoir directement le caractère non euclidien de l'espace.

Le Physicien. — Un espace non-euclidien, cela paraît contraire au bon sens !

Le Mathématicien. — Ce n'est pas du tout contraire à la raison, mais contraire à l'expérience courante, ce qui est bien différent puisque l'expérience se trouve rapidement limitée.

Le Physicien. — Je ne me vois pas percevant un espace non euclidien !

Le Mathématicien. — Vous n'avez cependant qu'à regarder l'image de la pièce où vous êtes dans un bouton de porte en métal poli et supposer que vous êtes l'un des habitants du monde que vous voyez.

Le Relativiste. — Voici une autre question à discuter. La distance de deux points doit être la longueur mesurée à l'aide d'une règle rigide. Nous pouvons supposer les deux points matérialisés puisque d'une manière ou d'une autre il nous faut les déterminer en les rapportant à des objets matériels. Pour plus de simplicité nous supposerons ces deux points matériels dépourvus de tout mouvement relatif de sorte que leur distance — quelle qu'elle soit — restera constante. Vous m'accorderez bien, j'espère, que le mouvement absolu n'existe pas, de sorte qu'il n'y a aucun état fondamental de la règle que nous puissions qualifier d'état de repos absolu. Rien ne nous empêche de faire nos mesures avec une échelle graduée animée de tous les mouvements que nous pouvons imaginer et si les lectures, pour des mouvements différents, ne concordent pas, aucun criterium ne nous permettra de choisir le vrai résultat. De plus, si les points matériels glissent le long de l'échelle, la distance lue dépend essentiellement des instants que nous choisissons pour faire les deux lectures.

Le Physicien. — C'est ce que vous pouvez éviter en définissant les distances comme les mesures faites avec une échelle dont la vitesse est la même que celle des deux points. Ceux-ci seront alors en contact permanent avec deux divisions déterminées de la règle.

Le Relativiste. — Excellente définition ! Malheureusement elle ne concorde pas avec la signification habituelle de la distance. Quand le relativiste veut parler de cette longueur que vous venez de définir, il l'appelle la *longueur propre* ; dans la physique non relativiste il ne semble pas qu'on ait utilisé cette notion. Vous concevez qu'il n'est guère commode de donner un mouvement rapide aux instruments de mesure de vos laboratoires — de leur donner par exemple la vitesse de deux particules α dont vous voudriez avoir la distance propre. Il vous serait bien difficile de mesurer la longueur d'onde de la lumière

en vons basant sur cette définition (1). Aussi le physicien rapporte-t-il ses longueurs à des appareils fixes par rapport à la Terre ; le mathématicien, lui, débute par ces mots : « Prenons des axes rectangulaires sans accélération Ox, Oy, Oz.... » et suppose que les règles de mesure sont au repos par rapport à ces axes. Donc, employer le mot « longueur » implique nécessairement quelque mouvement étalon arbitraire de l'appareil de mesure.

Le Physicien. — Mais alors, si vous avez fixé un mouvement type de la règle à mesurer, il n'y aura plus aucune ambiguité dans les lectures relatives aux deux points matériels faites au même moment.

Le Relativiste. — Oui ! Mais qu'appelez-vous le même moment en des endroits différents ? La conception de la simultanéité en des lieux divers est bien délicate. Y a-t-il un instant particulier dans le cours du temps d'un autre monde, Arcturus par exemple, qui soit le même que l'instant présent sur la Terre ?

Le Physicien. — Oui, à mon avis, si un lien les unit. Nous pouvons observer un événement, par exemple un changement d'éclat, sur Arcturus, et en tenant compte du temps mis par la lumière pour parcourir la distance qui nous sépare de ce monde, déterminer sur la Terre l'instant correspondant à cet événement.

Le Relativiste. — Il vous faut alors connaître la vitesse de la Terre à travers l'éther. La durée de propagation de la lumière qui nous vient d'Arcturus peut en effet se trouver raccourcie si la Terre et la lumière vont en quelque sorte à la rencontre l'une de l'autre.

Le Physicien. — N'est-ce pas là une correction négligeable ?

Le Relativiste. — D'après une évaluation qui n'est en rien exagérée cette durée pourrait se trouver modifiée de plusieurs jours du fait du mouvement de la Terre. En réalité toute vitesse de la Terre par rapport à l'éther, jusqu'à la vitesse de la lumière,

(1) La longueur propre d'une onde lumineuse est en réalité infinie.

est admissible sans que, pour cela, nos observations soient le moins du monde modifiées, ou du moins, rien n'a été découvert qui soit en opposition avec ce principe. L'erreur pourrait, par conséquent être de plusieurs mois et même de plusieurs années.

Le Physicien. — Ce que vous venez de nous montrer, c'est que notre science n'est pas assez étendue pour que nous puissions déterminer pratiquement des événements simultanés sur la Terre et sur Acturus. Il ne s'ensuit pas qu'il n'existe aucune simultanéité bien définie.

Le Relativiste. — C'est juste, mais il n'en reste pas moins possible que la raison pour laquelle nous sommes incapables, malgré nombre d'expériences remarquables, de déterminer pratiquement la simultanéité (ou ce qui revient au même, notre mouvement à travers l'éther) est qu'il n'existe pas de simultanéité absolue pour deux événements distants. Il est donc préférable de ne pas baser notre physique sur cette notion de simultanéité absolue qui peut ne pas exister et qui, de toute manière est en dehors de notre atteinte.

Tout ceci nous montre que le temps, aussi bien que l'espace, se trouve impliqué dans nos mesures. En principe, on ne mesure donc pas la distance de deux points de l'espace, mais la distance de ces deux points pris à des instants déterminés.

Notre géométrie naturelle est encore incomplète ; il nous faut lui ajouter le temps ; nous aurons dans nos mesures autant besoin d'une horloge parfaite que d'une règle rigide. Il peut être difficile de choisir une horloge étalon idéale, mais quelle que soit sa définition, ce doit être une définition physique. Nous ne devons pas tourner la difficulté en disant que l'horloge parfaite est celle qui donne le temps parfait. La meilleure horloge théorique serait peut-être une impulsion lumineuse se propageant dans le vide entre deux miroirs situés aux extrémités d'une règle rigide. Les instants d'arrivée de l'impulsion à l'une des extrémités définiraient des intervalles de temps égaux.

Le Physicien. — Il me semble que votre unité de temps variera avec le mouvement de votre horloge à travers l'éther.

Le Relativiste. — Parce que vous la comparez encore à quel-

que notion de temps absolu. Pour moi, je n'ai aucune notion du temps en dehors de celle que me fournit un type bien défini d'horloge (notre perception directe de la marche du temps est sans doute liée à des phénomènes moléculaires dans notre cerveau, qui jouent le rôle d'une horloge matérielle). Si vous connaissez une horloge meilleure, adoptons-la ; mais une fois choisie notre horloge idéale, nous devrons nous rendre à ses jugements car ils sont sans appel. Vous devrez vous rappeler également que si vous voulez déterminer la seconde en *un lieu bien défini*, vous devrez fixer votre horloge à ce que vous considérez comme ce lieu bien défini. La nécessité de préciser le mouvement de l'horloge nous montre que l'on ne peut considérer le temps sans faire intervenir l'espace ; il y a une géométrie qui réunit ces deux notions.

Le Physicien. — Est-il juste d'appeler cette étude une géométrie ? La géométrie ne concerne-t-elle pas l'espace seul ?

Le Mathématicien. — Je n'y vois aucune objection. Il devient simplement nécessaire de considérer le temps comme une quatrième dimension. Votre géométrie naturelle complète sera une géométrie à quatre dimensions.

Le Physicien. — Aurions-nous enfin découvert cette quatrième dimension si longtemps cherchée ?

Le Mathématicien. — Cela dépend du genre de la quatrième dimension que vous cherchiez. Ce n'est sans doute pas dans le sens où vous l'entendez. Pour moi cela signifie simplement que je dois ajouter une quatrième variable t aux trois variables d'espace x, y, z. Quant à savoir ce que représentent réellement ces variables, cela ne me regarde pas. Vous me donnez un certain nombre de lois fondamentales auxquelles elles satisfont et je m'arrange de façon à en déduire des conséquences qui peuvent présenter de l'intérêt pour vous. Que ces quatre variables soient la pression, la densité, la température et l'entropie d'un gaz, peu m'importe. Vous n'iriez tout de même pas dire que le gaz a quatre dimensions parce que quatre variables mathématiques vous sont nécessaires pour définir son état. Votre emploi du mot « dimension » est, je crois, plus restreint que le mien.

Le Physicien. — Je sais qu'il nous est souvent utile de repré-

senter la pression et le volume par des longueurs portées sur deux droites rectangulaires tracées sur une feuille de papier ; c'est ainsi que la géométrie peut avoir une application à la théorie des gaz ; mais n'est-ce pas aller un peu loin de dire que la géométrie peut opérer directement sur ces quantités et qu'elle ne s'occupe pas exclusivement des longueurs de l'espace ?

Le Mathématicien. — Non, car la géométrie est aujourd'hui pour une large part une méthode d'analyse de sorte que par sa forme autant que par son effet elle est à même d'opérer sur des variables d'une nature complètement inconnue. Il est vrai que souvent j'aperçois plus facilement les résultats en considérant mon x et mon y comme des longueurs tracées sur une feuille de papier. Il pourra même m'être utile pour obtenir d'autres résultats de les interpréter comme la pression et la densité à l'intérieur du cylindre d'une machine à vapeur ; seulement une machine à vapeur n'est pas un instrument aussi maniable qu'un crayon. On a raison de dire que je n'ai pas besoin de connaître la signification des variables x y z t dont je m'occupe. C'est heureux pour le relativiste parce que, si ma notion de l'espace absolu n'est qu'une illusion, il ne m'a donné aucun moyen de me représenter les grandeurs dont il a défini soigneusement les procédés de mesure.

Le Physicien. — Etrange sujet d'étude que le vôtre ! Vous nous avez avoué au début que cela ne vous regardait pas de savoir si vos propositions étaient vraies ou non et maintenant vous venez nous dire que vous ne vous souciez même pas de savoir de quoi vous parlez.

Le Mathématicien. — Voilà une excellente définition des mathématiques pures, qui a, du reste, déjà été donnée par un mathématicien éminent (1).

(1) Les mathématiques pures sont entièrement composées d'affirmations construites sur le modèle suivant : Si telle proposition est vraie d'une chose quelconque, telle autre proposition est vraie de cette même chose. Il est inutile de chercher à savoir si la première proposition est réellement vraie, et de spécifier la nature particulière de la chose dont il s'agit. On peut donc définir les mathématiques pures comme une étude où l'on ignore de quoi on parle et où l'on ne sait pas si ce qu'on dit est vrai (Bertrand Russell).

Le Relativiste. — Je crois qu'il y a une signification réelle attachée au temps considéré comme quatrième dimension et non plus, simplement, comme une quatrième variable. Le terme « dimension » me paraît lié à une idée d'*ordre*. Mon opinion est que l'ordre des événements dans la nature est un ordre quadridimensionnel indissoluble. Nous pouvons le diviser *arbitrairement* en espace et en temps de la même manière que nous pouvons diviser l'ordre de l'espace en longueur, largeur et hauteur. Mais l'espace sans le temps est aussi incomplet qu'une surface sans épaisseur.

Le Mathématicien. — Voulez-vous dire que l'Univers réel que nous révèlent les phénomènes de la nature est à quatre dimensions ?

Le Relativiste. — Je pense que dans l'Univers réel il doit exister un groupe d'entités liées les unes aux autres dans un ordre quadridimensionnel bien défini et qu'elles sont les bases de l'Univers que nous percevons aussi loin que la physique nous a permis de l'explorer. Il est peut-être possible de choisir un groupe quadridimensionnel d'entités dans un Univers fondamental à cinq dimensions, ou même seulement à trois dimensions. Les lignes droites dans l'espace à trois dimensions forment un groupe quadridimensionnel d'entités, autrement dit elles ont un ordre quadruple. On ne peut donc pas prévoir le nombre ultime des dimensions de l'Univers — si toutefois le mot *dimensions* est applicable.

Le Physicien. — Que penserait un philosophe de ces conceptions ? S'occupe-t-il uniquement d'un espace-temps métaphysique qui soit complètement en dehors du domaine de la mesure ?

Le Relativiste. — Tant qu'il n'est que psychologue, nos résultats doivent l'intéresser. La perception est une sorte de mesure physique imparfaite et l'espace-temps perçu n'est autre que l'espace-temps mesuré, objet de la géométrie naturelle. Les autres points de vue doivent le concerner d'une manière moins immédiate. Les physiciens et les philosophes ont été pendant longtemps d'accord sur ce fait que le mouvement à travers l'espace absolu n'a aucun sens ; en physique, la question pré-

cise est de savoir si le mouvement à travers l'éther a une signification quelconque. A mon avis, elle n'a pas de sens ; mais cette réponse, bien qu'elle cause un rapprochement étroit de la physique et de la philosophie, n'a aucun rapport avec la question philosophique du mouvement absolu. Je pense pourtant que nous sommes en droit d'attendre de la part des philosophes une bienveillante attention puisque nous donnons à leurs idées une application pratique peut-être inattendue.

Résumons maintenant les conclusions que l'on peut tirer de cette conversation. Nous avons essayé de donner une signification précise du terme « espace » de manière à nous rendre capables de déterminer exactement les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons. Il n'y a pas moyen de déterminer les propriétés du nôtre par un raisonnement *a priori,* car nous avons à choisir parmi un grand nombre de genres possibles d'espaces et aucun d'eux ne peut être regardé comme plus vraisemblable que les autres. Pendant plus de *deux mille* ans nous nous sommes crus dans un Univers euclidien, car certaines expériences avaient favorisé cette présomption ; or, il y a de fortes raisons de penser que ces mêmes expériences poussées à un degré de précision plus grand décident en faveur d'Univers légèrement différents (dans le voisinage de corps attirants). Le relativiste ne voit aucun motif de « changer les règles du jeu » dans ce fait que les résultats ne concordent pas avec les prévisions. En conséquence, quand il parle de l'espace, il désigne celui que nous révèle la mesure, quelle que soit sa géométrie. Il montre que c'est là l'espace dont s'occupe le physicien, et de plus, c'est celui de notre perception usuelle. Si on l'accusait de vouloir ainsi s'approprier le terme « espace » il représenterait, pour sa défense, que c'est cette signification même du terme que l'on a utilisée jusqu'ici en physique ; ce n'est que récemment que quelques physiciens « conservateurs », effrayés par les conséquences révolutionnaires des expériences modernes, ont commencé à jouer avec cette idée d'un espace *a priori* dont les propriétés ne peuvent pas être établies par l'expérience — un espace métaphysique — auquel ils attribuent arbitrairement des propriétés euclidiennes malgré ce fait évident que sa géométrie ne pourra jamais être confirmée expérimentalement. Tandis

que le relativiste, en définissant l'espace comme un espace mesuré, reconnaît nettement que toute mesure comporte l'emploi d'un appareil matériel ; la géométrie qui en résulte est une étude des propriétés d'extension de la matière. Il se refuse à considérer toute autre entité d'une transcendance plus élevée.

Mon deuxième point, le voici : puisque la géométrie naturelle est l'étude des propriétés d'extension de la matière et que l'on a trouvé que leur ordre dans l'espace ne peut être envisagé indépendamment de leur ordre dans le temps, il est devenu nécessaire de généraliser notre géométrie en y faisant intervenir une quatrième dimension, le temps.

CHAPITRE I

La contraction de Fitzgerald-Lorentz.

Que, pour examiner la vérité, il est besoin une fois en sa vie de mettre toutes choses en doute autant qu'il se peut.

Descartes (*Principes de la Philosophie*).

Un nageur dans une rivière mettra-t-il plus de temps à parcourir un trajet de 100 mètres en sens contraire du courant, suivi du trajet de retour au point de départ, qu'à faire ce même aller et retour perpendiculairement à la direction précédente ? Il y a dans le premier cas une longue lutte contre le courant puis un retour favorisé par celui-ci, mais qui est trop court pour compenser le retard de la première phase du trajet. Dans le second cas il y a également une gêne due au courant car le nageur doit dépenser une partie de son énergie à vaincre l'effet d'entraînement de la rivière. Mais aucun nageur n'hésitera à dire que la gêne est plus grande dans le premier cas.

Prenons un exemple numérique. Supposons la vitesse du nageur égale à 50 m. à la minute en eau calme et celle du courant à 30 m. à la min. La vitesse dans le sens opposé au courant est alors de 20 m. à la min., celle dans le sens même de 80 m. à la min.. La première phase du trajet — celle contre le courant — dure 5 minutes, la deuxième 1,25 min. ; total : 6,25 min. Dans son parcours transversal le nageur doit, pour atteindre le point fixe B, prendre pour but un certain point E de la rivière qui vient coïncider avec B au moment où lui-même atteint ce point ; de sorte que OE représente le parcours correspondant en eau calme, EB la valeur de sa dérive. Ces deux distances doivent être dans le rapport de 50 à 30 et le triangle rectangle OBE nous montre alors que OB correspond à 40. Comme OB = 100 m., OE = 125 m. et la durée

du parcours OB est 2,5 min. ; le même temps sera également nécessaire pour le retour ; durée du trajet complet : 5 min.. En eau calme il aurait fallu 4 min.. Le rapport des durées des deux trajets longitudinal et transversal est donc de

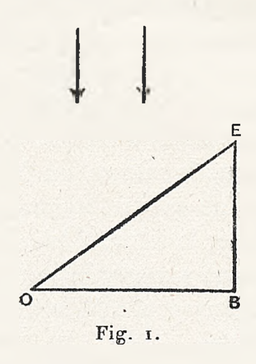


Fig. 1.

$\frac{6,25}{5}$ rapport que nous pouvons mettre sous la forme :

$$\sqrt{1 - \left(\frac{30}{50}\right)^2}$$

ce qui met en évidence la manière dont le résultat dépend du rapport de la vitesse du courant à la vitesse du nageur, 30/50.

Une expérience célèbre basée sur ce principe a été faite en Amérique en 1887. Le nageur était une onde lumineuse que nous savons « nager » à travers l'éther avec une vitesse de 300.000 km. par sec.. L'éther coulait entre les murs du laboratoire comme une rivière entre ses bords. L'onde lumineuse était divisée par une réflexion partielle sur un miroir faiblement argenté, en deux parties dont l'une avait à parcourir l'aller et le retour dans la direction du courant, et l'autre le trajet dans la direction perpendiculaire. Aux points où les deux ondes devaient rebrousser chemin se trouvaient deux miroirs qui les renvoyaient à leur point de départ. Pour juger du résultat de cette course, un système optique permettait d'obtenir des franges d'interférence ; par la superposition des deux ondes à leur retour on pouvait en effet savoir si l'une d'elles s'était trouvée retardée par rapport à l'autre, si par exemple une crête de l'une, au lieu de coïncider avec une crête de l'autre, était venue se superposer à un creux .

Au grand étonnement de Michelson et Morley qui faisaient l'expérience, cette dernière fut muette. Il est vrai qu'on ignorait la direction du courant d'éther — qu'ils espéraient mettre en évidence grâce à l'expérience elle-même. On avait du reste paré à cette lacune en donnant à l'appareil différentes orientations. Il se pouvait aussi qu'il n'y eût réellement aucun courant d'éther au moment de l'expérience. Mais la Terre a une vitessse de 30 km. par sec. et change sans cesse d'orientation dans sa rotation autour du Soleil ; par conséquent, à une certaine époque de l'année, la vitesse du laboratoire terrestre par rapport à l'éther était d'au moins 30 km. par sec.. L'expérience aurait permis de constater le retard dû à un courant d'une vitesse beaucoup moindre ; dans une répétition de cette expérience qui fut faite en 1905 par Morley et Miller un courant de 3 km. par sec. aurait pu être décelé.

Si nous avons deux concurrents dont on sait que l'un va moins vite que l'autre, et qui néanmoins arrivent ensemble au poteau d'arrivée, ils n'auront évidemment pas parcouru des chemins égaux. Pour confirmer ce point, l'appareil entier subissait une rotation d'un angle droit de sorte que le parcours dans le sens du courant devenait cette fois le parcours dans le sens perpendiculaire et réciproquement. Nos deux concurrents échangeaient leurs pistes mais l'expérience montra encore qu'ils arrivaient « ex æquo ».

Le caractère surprenant de ce résultat est bien mis en lumière quand on le compare au résultat obtenu dans une expérience semblable faite sur les ondes sonores. Le son consiste en ondes se propageant dans l'air ou dans une autre matière, de même que la lumière consiste en ondes se propageant dans l'éther. On pourrait faire sur le son une expérience exactement semblable à celle de Michelson, avec un courant d'air circulant dans l'appareil, au lieu d'un courant d'éther. Dans ce cas on mettrait sûrement en évidence le retard maximum subi par le son quand celui-ci a le sens du courant. Pourquoi donc la lumière semble-t-elle se conduire autrement ?

L'interprétation immédiate de ce résultat remarquable est que chaque parcours subit automatiquement une contraction quand, de parcours transversal, il devient parcours longitudinal, de sorte que, quel que soit le bras de l'appareil qui prend

le sens du courant d'éther, il devient aussitôt le plus court des deux. Le chemin que suit la lumière est déterminé par l'appareil matériel et rigide ; nous devons donc supposer que toute partie de cet appareil a une longueur variable avec son orientation par rapport au courant d'éther. On a trouvé que la nature de la matière formant l'instrument (métal, pierre, bois) n'a aucune influence sur l'expérience. La contraction doit donc être indépendante de la matière ; le retard qu'on s'attendait à observer ne dépendant que du rapport de la vitesse de l'éther à la vitesse de la lumière, la contraction qui compense exactement ce retard se trouve donc également bien définie par ce même rapport.

Cette explication fut proposée par Fitzgerald et, à première vue, elle semble une hypothèse bien étrange et arbitraire. Elle est pourtant devenue très plausible depuis les recherches théoriques de Larmor et de Lorentz. Dans des conditions normales la forme et les dimensions d'un solide sont maintenues par les forces de cohésion qui s'exercent entre les particules qui le constituent. Quelle est la nature de cette cohésion ? Nous présumons qu'elle doit tirer son origine des forces électriques qui agissent sur les molécules. Or l'éther est le milieu dans lequel les forces électriques ont leur siège ; par conséquent, la manière dont s'écoule le milieu électrique par rapport aux molécules ne doit pas être indifférente à ces forces. Quand le courant varie il doit y avoir une variation correspondante des forces de cohésion et nous devons nous attendre à observer une nouvelle forme et de nouvelles dimensions du corps solide.

La théorie de Larmor et de Lorentz nous rend capables d'étudier dans le détail cette variation des forces de cohésion. Les formules connues de l'électromagnétisme montrent que la nouvelle forme d'équilibre du corps aura subi une contraction dans le sens et de la quantité voulus par l'hypothèse de Fitzgerald (1).

La contraction dans la plupart des cas est extrêmement petite. Nous avons vu qu'elle se faisait dans le rapport de $\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$ à 1 quand le rapport de la vitesse du courant à celle du nageur était de 3/5. La vitesse de la Terre sur son orbite est environ 1/10.000

(1) Appendice. Note 1.

de la vitesse de la lumière, ce qui donne une contraction dans le rapport de $\sqrt{1-\left(\frac{1}{10.000}\right)^2}$ à 1, c'est-à-dire un raccourcissement de 1/200.000.000 ; le diamètre de la Terre dans la direction de son mouvement se trouve donc raccourci de 6 cm. 5.

L'expérience de Michelson et Morley ne nous a pas permis de déceler notre mouvement par rapport à l'éther, car l'effet que nous devions observer (le retard d'une des ondes lumineuses) est exactement compensé par une contraction automatique de la matière constituant l'appareil. D'autres expériences ingénieuses, tant électriques qu'optiques, et d'un caractère plus technique ont été essayées. Toutes ont échoué, car il y a toujours quelque part une compensation qui se fait automatiquement. Elles nous ont conduit à penser qu'il y a dans la nature des choses un principe, cause de cette compensation inévitable qui nous empêchera toujours de déterminer notre mouvement à travers l'éther. Que nous soyons au repos par rapport à lui ou que nous y soyons précipités avec une vitesse presque égale à celle de la lumière, voilà qui ne crée aucune différence dans ce qu'il nous est possible d'observer.

Ces considérations peuvent sembler une généralisation téméraire des résultats que nous ont fournis les quelques expériences qui ont pu être faites, et dans des cas bien particuliers, puisque nous ne pouvons expérimenter que sur le petit groupe des vitesses que nous donne le mouvement de la Terre sur son orbite. Avec un groupe plus étendu, des variations résiduelles pourraient se révéler. Pourtant il y a une autre raison qui nous porte à croire que cette compensation n'est pas seulement approximative, mais complète ; on a pu, en effet, la suivre théoriquement jusqu'à son origine dans les lois bien connues de la force électromagnétique ; et ici elle est mathématiquement exacte. La généralisation est, par suite, bien justifiée, du moins tant que les phénomènes observés ont une cause électromagnétique, et que les lois universellement admises de l'électromagnétisme sont applicables et vraies.

Cette généralisation nous conduit à ce que l'on a appelé le Principe de Relativité restreinte :

Il est impossible, par quelque expérience que ce soit, de mettre en évidence un mouvement uniforme par rapport à l'éther.

Il y a des forces de la nature que, jusqu'ici, l'on n'a pas pu faire rentrer dans le cadre du schéma électromagnétique — la gravitation, par exemple — et pour ces forces d'autres expériences sont nécessaires. En vérité nous n'avions pas le droit, plus haut, de dire que le diamètre de la Terre subissait une contraction de 6 cm. 5, car la forme du globe est principalement déterminée par la gravitation tandis que l'expérience de Michelson et Morley se rapporte à des corps où n'interviennent que les forces de cohésion. Mais il y a des raisons théoriques sérieuses de croire que la compensation a également lieu dans les phénomènes se rapportant à la gravitation ; nous admettrons donc que le principe est applicable à toutes les forces de la nature.

Supposons, pour un moment, qu'il n'en soit pas ainsi et qu'il soit possible de déterminer un mouvement absolu de la Terre, par des expériences ou des observations ayant trait à la gravitation. Cette détermination jetterait-elle un peu de lumière sur notre mouvement par rapport à l'éther ? Je ne pense pas. Elle montrerait qu'il existe une sorte d'étalon de repos par rapport auquel la loi de gravitation prend une forme simple et symétrique ; cet étalon correspondrait sans doute à quelque milieu gravitationnel et c'est par rapport à ce milieu que notre mouvement se trouverait déterminé. De même si le mouvement nous était révélé par des phénomènes vitaux ou psychiques, ce serait un mouvement par rapport à quelque milieu vital ou psychique. L'éther défini comme le siège des forces électriques ne peut nous être révélé (si toutefois la chose est possible) que par des phénomènes électriques.

Il est bon de se rappeler qu'il est légitime et rationnel d'adopter le principe de relativité même si les preuves expérimentales sont insuffisantes. Dans la dynamique newtonienne les phénomènes ne dépendent pas du mouvement uniforme du système de référence. Ce fait ne demande aucune explication car il est difficile de voir pourquoi ce mouvement pourrait avoir un effet. Si dans d'autres phénomènes le principe se trouve en défaut, nous chercherons alors une explication de sa faillite — et sans aucun doute, nous en trouverons une plausible — ; mais tant que l'expérience ne le met pas en échec, ce serait perdre son temps que d'aller au-devant d'une telle complication. Evidemment, la physique ne peut pas s'occuper de toutes

les complications possibles qui *peuvent* exister dans la nature, mais dont aucune, jusqu'ici, ne nous a été révélée par l'expérience.

Le principe de relativité présente des conséquences d'un caractère véritablement révolutionnaire. Considérons le cas suivant qui est sans doute exagéré — ou peut être le cas réel, nous ne pouvons rien en dire. Que le lecteur se suppose lancé dans l'éther verticalement et de bas en haut, avec une vitesse de 260.000 km. par sec. ; s'il lui plaît d'affirmer que telle est sa vitesse, personne ne pourra trouver une preuve suffisante pour le contredire. Pour cette vitesse, la contraction de Lorentz est de 1/2 de sorte que tout objet horizontal prend une longueur moitié moins grande quand il est placé verticalement. Couché dans votre lit vous avez par exemple 6 pieds de long [1] ; levez vous et restez debout, votre hauteur n'est plus que de 3 pieds. Vous êtes incrédule ? Bien, je vais alors vous le prouver ! Prenez un yard à mesurer placé verticalement ; il subit la contraction de Fitzgerald et ne vaut plus que 1/2 yard. Si vous vous en servez pour vous mesurer, vous trouvez exactement 2 demi-yards. « Mais », me direz-vous, « je vois bien que mon yard ne change pas de longueur quand je le tourne ». D'accord ! Mais ce que vous percevez, c'est l'image de la règle sur la rétine de votre œil ; vous avez la sensation que cette image occupe le même espace de votre rétine dans les deux positions ; or, votre rétine a subi la contraction dans la direction verticale sans que vous vous en doutiez, de sorte que vos estimations visuelles d'une longueur verticale sont doubles de ce qu'elles devraient être. Et il en est de même dans toutes les expériences que vous pouvez imaginer. Comme tout est modifié dans la même proportion, rien ne semble modifié.

On peut concevoir des expériences électriques ou optiques ; dans ce cas, l'explication est plus difficile car nous avons à considérer l'effet du rapide courant d'éther sur les forces électriques ou les ondes lumineuses ; mais la conclusion est invariablement la même ; toutes ces expériences ne nous révèlent rien. En voici un exemple. Pour éviter une distorsion de la rétine

[1] Nous rappelons que : 1 yard = 3 pieds = 0,9144 m. et que 1 pied = 12 pouces = 0 m. 305. (*Note du Trad.*).

couchez-vous sur le dos par terre et observez à l'aide d'un miroir convenablement orienté, une règle que quelqu'un fait tourner de la position horizontale à la position verticale. Vous ne vous apercevrez naturellement d'aucune variation dans la longueur et on ne peut pas, cette fois, s'en prendre à la rétine. Mais l'image dans le miroir, est-elle une reproduction fidèle de ce qui se passe réellement ? Dans un miroir plan au repos, l'image est correcte ; les rayons lumineux obéissent aux lois ordinaires de la réflexion comme une boule de billard qui rebondit sur une plaque élastique. Mais si la plaque est animée d'un mouvement rapide l'angle de rebondissement de la boule sera modifié ; il en est de même pour le mouvement rapide d'un miroir par rapport à l'éther : les lois de la réflexion se trouvent modifiées. Un calcul rigoureux montre que le miroir mobile doit causer une déformation de l'image de manière à cacher exactement les variations de longueur qui existent.

Le mathématicien n'a pas besoin d'entrer dans le détail de toutes les expériences possibles. Il sait que la compensation parfaite est inhérente aux lois fondamentales de la nature et doit avoir par conséquent lieu dans tous les cas. Par suite, si l'on parle devant lui de quelque expérience destinée à mettre en évidence ces effets, la première chose qu'il fait c'est de rechercher la faute qui s'est inévitablement glissée dans le raisonnement. Notre vitesse par rapport à l'éther peut être beaucoup moindre que celle que nous avons supposée précédemment et les variations de longueur peuvent être extrêmement petites ; mais le point essentiel c'est qu'elles échappent à l'observation non parce qu'elles sont petites (si toutefois elles le sont), mais parce que d'après leur nature même elles sont inobservables.

Il existe une réciprocité remarquable au sujet de l'effet du mouvement sur la longueur, et on peut l'illustrer par cet autre exemple. Admettons que, par suite des progrès de l'aviation, un homme puisse atteindre dans son vol la vitesse de 260.000 km. par sec.. Nous le supposerons dans un avion confortable et bien aménagé dans lequel il puisse se mouvoir et agir d'une manière normale ; supposons-le également allongé dans la direction du vol. Si nous pouvons, lors de son passage, jeter sur lui un coup d'œil rapide, nous apercevrons une forme de 3 pieds de longueur, mais ayant la largeur et le tour de taille d'un

homme normal. Chose étrange : il paraît parfaitement inconscient de son aspect grotesque ! S'il se regarde dans un miroir fixé à l'avion, il se voit avec ses proportions habituelles ; c'est, comme nous l'avons déjà expliqué, la conséquence de la contraction de sa rétine et de la distorsion causée par le miroir mobile. Mais, quand il jette les yeux sur nous, il aperçoit une race bizarre d'hommes qui semblent avoir passé dans quelque laminoir ; l'un d'eux paraît n'avoir que 10 pouces de largeur d'épaules ; un autre, tourné à angle droit du premier, est presque « une longueur et une largeur sans épaisseur ». Quand ils pivotent, leur apparence change, comme les images que l'on pouvait voir dans ces miroirs convexes autrefois à la mode. S'il est arrivé au lecteur d'observer un match de cricket au moyen d'une jumelle à prismes, il aura eu exactement une impression de ce genre en raison de l'exagération du relief.

C'est la réciprocité de ces apparences — chacun des deux corps en mouvement se figurant que c'est l'autre qui a subi une contraction — qui est si difficile à se représenter. Voici un paradoxe qui dépasse même l'imagination de Swift. Gulliver prenait les Lilliputiens pour une race de nains et les Lilliputiens regardaient Gulliver comme un géant. C'est naturel. Mais si les Lilliputiens avaient semblé des nains à Gulliver et que Gulliver eût paru un nain pour les Lilliputiens — Non ! Voilà qui eût paru par trop absurde à notre imagination et c'est bien là une de ces idées invraisemblables que l'on ne peut trouver que dans les pages austères de la Science !

Il est aisé de voir que cette réciprocité n'est qu'une conséquence du principe de relativité. L'aviateur doit observer une contraction de Fitzgerald dans les objets qui se meuvent rapidement par rapport à lui, de même que nous observons la contraction des objets qui se meuvent par rapport à nous, et qu'un observateur au repos dans l'éther observerait celle des objets mobiles par rapport à l'éther. Tout autre résultat lui permettrait de mettre en évidence un effet dû à son mouvement propre par rapport à l'éther.

Qui a raison, de nous ou de l'aviateur ? Ou bien, tous deux, ne sommes-nous pas victimes d'une illusion ? Ce n'est pas une illusion au sens ordinaire du mot, puisque nos impressions respectives peuvent être confirmées par l'expérience et le calcul.

Personne ne sait qui a raison et personne ne le saura jamais car nous ne pourrons jamais trouver ce qui est vraiment en repos par rapport à l'éther — si toutefois nous admettons l'existence de l'éther.

Ce n'est pas seulement dans l'espace que de pareilles variations se présentent, c'est aussi dans le temps. Si nous avons observé avec soin l'aviateur, nous avons pu conclure que ses mouvements avaient une lenteur inaccoutumée et que les événements qui se déroulaient dans l'avion semblaient également retardés — comme si le temps avait oublié de s'écouler ! Son cigare eût paru durer deux fois plus de temps que les nôtres. J'ai dit « conclure » à dessein car le ralentissement du temps *observé* eût été beaucoup plus exagéré ; mais cela s'explique aisément, la distance qui nous sépare de l'aviateur augmentant sans cesse et la lumière devant mettre un temps de plus en plus long pour nous atteindre. Le retard plus modéré que nous avons conclu subsiste après que nous avons tenu compte de la durée de propagation de la lumière.

Mais la réciprocité intervient encore ici car pour l'aviateur c'est nous qui voyageons à 260.000 km. par sec., et une fois faites toutes les corrections qu'il croit devoir faire il doit conclure que c'est nous les paresseux qui ne nous pressons pas. Pour lui, notre cigare dure deux fois plus de temps que le sien.

Voyons de plus près comment ces deux opinions peuvent s'accorder. Imaginons que, lui et nous, nous allumions des cigares semblables au moment où il passe près de nous. Au bout de 30 minutes notre cigare est terminé. Cet événement porté par les ondes lumineuses bondit dans l'espace à la vitesse de 300.000 km. par sec. pour rattraper l'aviateur qui ne voyage qu'à 260.000 km. par sec. et qui avait une avance de 30 minutes au départ. Le signal mettra près de 194 minutes pour le rattraper, ce qui nous donne un temps total de 224 minutes depuis que nous avons allumé notre cigare. La montre de l'aviateur, comme tout ce qui l'entoure (y compris son cigare) ne marche qu'avec une vitesse moitié de leur vitesse normale ; aussi ne compte-t-il que 112 minutes quand notre signal lui parvient. L'aviateur sait, bien entendu, que ce n'est pas là le temps qu'a brûlé notre cigare et qu'il doit faire la correction pour la durée de propagation de la lumière. Il se pose donc

ce problème : — une personne a par rapport à moi une vitesse de 260.000 km. par seconde ; elle a voyagé pendant x minutes, temps au bout duquel elle a émis un signal qui a parcouru la même distance en sens inverse, à la vitesse de 300.000 km. par sec. ; le temps total entre le moment où la personne m'a quitté et celui où le signal m'est parvenu est de 112 minutes. Trouver x ? Réponse : x = 60 min.. Il en conclut par conséquent que notre cigare a duré une heure, c'est-à-dire 2 fois plus que le sien. D'après sa montre son cigare a duré 30 minutes (car le même ralentissement affecte à la fois sa montre et son cigare) ; pour nous il avait semblé durer deux fois plus de temps que le nôtre puisque sa montre ne marche qu'avec une vitesse moitié moindre.

Voici le tableau qui résume la discussion :

Montre station.	Observ. station.	Aviateur	Montre de l'aviateur
0^m	Allume son cigare.	Allume son cigare.	0^m
30^m	Finit son cigare.	—	15^m
60^m	Conclut que l'aviateur finit son cigare.	Finit son cigare.	30^m
112^m	Reçoit le signal de la fin du cigare de l'aviateur.	—	56^m
120^m	—	Conclut que le cigare de l'observateur stationnaire s'éteint.	60^m
224^m	—	Reçoit le signal de la fin du cigare de l'observateur stationnaire.	112^m

Ce tableau résume l'analyse à notre point de vue et non à celui de l'aviateur, car il fait ressortir que ses conclusions sont fausses et que nous avons raison. En réalité personne ne peut dire qui a raison de nous deux.

Une discussion plus complète nous montrerait que la cause fondamentale de ce paradoxe est que nous nous supposons au repos dans l'éther et que l'aviateur fait aussi la même hypothèse. Par suite, tandis que nous pensons que le signal lumineux le rattrape avec une vitesse égale à la différence (300.000-260.000) km. par sec., il considère, lui, que ce signal vient à sa rencontre avec la vitesse normale de la lumière. On doit se rappeler que l'opinion de chacun des observateurs est basée d'une manière parfaitement certaine sur des résultats expérimentaux. Si nous suggérons cette idée à l'aviateur que, par suite de sa grande vitesse à lui, la vitesse relative de l'onde qui le rattrape n'est que de 40.000 km. par seo., il ne manquera pas de répondre : « J'ai déterminé la vitesse de l'onde par rapport à moi, en chronométrant son passage par deux points de mon avion et elle s'est montrée égale à 300.000 km. par sec.. Je suis donc sûr que ma correction pour la durée de propagation de la lumière est juste » [1]. Ses horloges et règles graduées se comportent à notre point de vue d'une manière fort étrange, de sorte qu'il n'y a rien qui puisse nous surprendre s'il trouve, pour la mesure de la vitesse de la lumière qui le rattrape, un nombre différent du nôtre ; et il n'y a aucun moyen d'arriver à le convaincre que notre évaluation est préférable à la sienne.

Bien que ce ne soit pas un problème d'un intérêt très pratique, il n'est tout de même pas mauvais de se demander ce qui arrive quand la vitesse de l'aviateur augmente encore et qu'elle atteint celle de la lumière. Les longueurs dans la direction du vol deviennent de plus en plus courtes, jusqu'à ce que, pour la vitesse de la lumière, elles se réduisent à zéro. L'aviateur et les objets qui l'accompagnent dans son vol se réduisent à deux dimensions. La difficulté de nous imaginer comment la vie peut encore se poursuivre avec deux dimensions seulement, nous est épargnée, car rien ne se poursuit plus : le temps est également arrêté ! Telle est la description que peut

[1] Nous ne jugeons pas nécessaire de nous arrêter sur la démonstration de cette affirmation. Si l'aviateur pouvait, dans ses mesures, mettre en évidence quelque fait incompatible avec l'hypothèse de son repos par rapport à l'éther (par exemple, une différence entre les vitesses des ondes lumineuses qui le rattrapent et de celles qui viennent à sa rencontre) il serait en contradiction avec le principe de relativité.

donner un observateur terrestre. Quant à l'aviateur il ne remarque rien d'anormal en ce qui le concerne ; il ne s'aperçoit pas le moins du monde qu'il a cessé de bouger. Il attend purement et simplement le moment suivant pour faire le mouvement suivant, et ce fait que le temps est arrêté signifie qu'il ne s'aperçoit pas que ce n'est qu'au bout d'un temps très long que ce moment suivant arrive.

C'est un moyen excellent de nous rendre compte des distances énormes qui séparent les étoiles que d'imaginer un voyage à travers l'espace avec la vitesse de la lumière. Un jeune voyageur s'installe sur un tapis magique, emportant avec lui des provisions pour un siècle. Quand il atteint le but de son voyage, par exemple Arcturus, ce n'est plus qu'un centenaire décrépit. Non, pas du tout ! Il est parfaitement exact que le voyage aura duré quelque chose comme un siècle pour les calendriers terrestres ; mais le voyageur arrive à destination sans être plus âgé qu'à son départ, et il n'aura pas eu le temps de songer à manger. Aussi longtemps qu'il a la faculté de voyager avec la vitesse de la lumière, il possède l'immortalité et une éternelle jeunesse ! S'il trouve, maintenant, le moyen de revenir sur la Terre il pourra s'apercevoir que les siècles y ont accompli leur œuvre tandis que lui ne se sent pas plus vieux d'un jour — pour lui, le voyage n'a duré qu'un instant [1].

Cette discussion sur les effets de vitesses aussi peu probables a été faite uniquement pour que nous puissions énoncer les résultats en langage courant au lieu d'avoir sans cesse à recourir au langage spécial utilisé dans les mesures techniques délicates. Le relativiste est souvent accusé d'un amour immodéré pour le paradoxe ; mais c'est plutôt là une interprétation erronée de sa théorie. Les paradoxes prennent naissance quand

[1] Comme la Terre se meut par rapport au voyageur avec la vitesse de la lumière nous pourrions être tentés de dire que l'observateur terrestre aurait une éternelle jeunesse pendant que le voyageur vieillit. Evidemment, s'ils se rencontrent de nouveau ils pourront voir laquelle des deux opinions est à rejeter. Mais, pour qu'ils puissent se rencontrer de nouveau, la vitesse de l'un d'eux doit être changée de signe par des moyens surnaturels ou par une force de gravitation intense de sorte que les conditions ne sont plus symétriques et que la réciprocité ne s'applique plus. Le raisonnement donné dans le texte paraît donc le seul correct.

de nouvelles découvertes expérimentales viennent s'ajouter aux connaissances physiques jusque-là admises et c'est ce que le relativiste cherche à mettre en évidence. Il conclut ensuite qu'un schéma nouveau de la physique est nécessaire dans lequel les nouveaux résultats expérimentaux puissent trouver une place naturelle, et ne soient plus paradoxaux.

En résumé, sur toute planète qui se meut par rapport à l'éther avec une grande vitesse, des variations extraordinaires de longueur affectent les objets par suite de leur mouvement, et il y a un ralentissement de tous les phénomènes naturels comme si le temps lui-même avait ralenti sa marche. Ce sont là des effets que personne sur la planète ne peut percevoir ; mais des effets de cette nature seraient perçus par tout observateur doué d'une grande vitesse relative par rapport à la planète (cet observateur faisant toutes les corrections nécessaires pour trouver l'effet du mouvement sur ses observations, mais sûr de son immobilité par rapport à l'éther) (1). Il y a une réciprocité complète qui fait que chacun des deux observateurs en mouvement relatif constatera chez l'autre les mêmes phénomènes étranges, car il n'y a rien qui puisse nous aider à savoir lequel des deux a raison.

A mon avis, on ne peut songer à ces résultats sans immédiatement se demander si toute leur étrangeté ne proviendrait pas de quelque défaut de notre manière de voir ordinaire. Des modifications se font sur une planète, toutes compensées harmonieusement par des combinaisons des forces naturelles, de telle sorte qu'il ne soit possible à aucun habitant de cette planète de mettre en évidence ce qui se passe vraiment. Pouvons-nous sérieusement imaginer qu'il y ait réellement au fond des choses un mécanisme aussi décevant ? N'est-il pas plus probable que nous-mêmes introduisions cette complication, incapables

(1) Cette dernière condition n'est peut-être pas nécessaire. La correction à faire pour la durée de propagation de la lumière sera, bien entendu, basée sur la détermination de la vitesse de la lumière faite par l'observateur lui-même. D'après les résultats de l'expérience, la vitesse de la lumière par rapport à lui, *semble* la même dans toutes les directions et c'est sur ce résultat qu'il s'appuiera pour faire ses corrections. Cela revient à supposer qu'il est au repos dans l'éther ; mais il n'a pas besoin de faire explicitement cette hypothèse, et il ne la fera probablement pas.

que nous sommes dans nos méthodes d'exposition de faire un tableau simple et naturel de la réalité ?

La recherche d'une méthode d'exposition mieux adaptée nous conduit au point de vue relativiste, décrit dans le prochain chapitre. Je tiens à bien marquer la séparation qui existe entre le principe de relativité et le point de vue relativiste. Le principe est la traduction d'un fait expérimental qui peut être vrai ou non ; sa première partie — le principe restreint — a déjà été énoncée. Ses conséquences peuvent se déduire par le raisonnement mathématique comme pour toutes les autres généralisations scientifiques. Il n'exige aucun mécanisme particulier de la nature ni aucune considération sur la signification du temps et de l'espace, bien qu'il puisse suggérer des théories sur ce sujet. La seule question est de savoir si, expérimentalement, il est vrai ou non.

Le point de vue, ou la thèse relativiste est d'un tout autre caractère ; elle affirme d'abord que certaines hypothèses gratuites sur le temps et sur l'espace se sont peu à peu glissées dans les théories physiques ordinaires, et qu'elles sont la cause des difficultés que nous avons rencontrées précédemment. Or, les hypothèses les plus dangereuses sont celles qui sont sous-entendues et inconscientes. Aussi, la thèse relativiste propose-t-elle de se passer de ces hypothèses (sans en introduire aucune autre à la place) ; elle montre qu'elles n'ont rien de nécessaire et qu'elles ne s'appuient sur aucun fait connu. Cette simplification paraît être une justification suffisante de la thèse. Même si plus tard on devait découvrir des phénomènes qui viennent confirmer les hypothèses abandonnées, le relativiste n'aurait pas eu tort de les mettre de côté jusqu'au jour où l'expérience serait venue les imposer.

C'est loin d'être notre politique de nous réfugier dans des positions inexpugnables et nous n'hésiterons pas à tirer de nos connaissances actuelles, aussi bien des conclusions vraisemblables que d'autres, prouvées d'une manière irréfutable. Mais à ceux qui croient que la théorie de la relativité n'est qu'une phase éphémère de la pensée scientifique que pourraient anéantir les découvertes expérimentales futures, je me contenterai de signaler que, bien qu'elle puisse dans l'avenir, comme toute autre théorie, se trouver développée et retouchée,

elle contient un minimum de propositions qui constituent un progrès définitif. Dans toutes les descriptions physiques et les théories courantes jusqu'à ce jour, entrent des hypothèses qui, dans certains cas, ont pris naissance il y a 2.000 ans, dans d'autres, il y a 200 ans. Il est maintenant établi que ces hypothèses n'ont rien à voir avec aucun des phénomènes qu'on a pu observer jusqu'à présent, et qu'elles ne donnent l'explication d'aucun fait connu. C'est là sûrement une découverte de la plus grande importance — en mettant complètement à part la question de savoir si ces hypothèses sont réellement fausses.

Je ne partage pas cette opinion si répandue que la seule chose que doive rechercher la théorie scientifique, c'est « l'économie de la pensée ». Je ne puis abandonner cet espoir que la théorie nous conduit par échelons insensibles à la Vérité universelle. A moins que la science ne doive dégénérer en un jeu de devinettes sans utilité, on ne peut juger de la valeur d'une théorie que par le nombre aussi petit que possible des hypothèses et arguments nécessaires pour expliquer les faits qu'elle prétend embrasser. La vérité accidentelle d'une conclusion n'est pas une compensation d'un raisonnement erroné.

La thèse relativiste a donc pour principe d'écarter certaines hypothèses qui ne sont exigées par aucun fait connu et qui nous empêchent de comprendre la simplicité de la nature.

CHAPITRE II

LA RELATIVITÉ.

Les hommes, les animaux, les pierres grandissent en s'approchant et deviennent énormes quand ils sont sur moi. Moi non. Je demeure toujours aussi grand partout où je suis.

ANATOLE FRANCE (*Pensées de Riquet*).

Il faut dans toute observation distinguer deux éléments : l'observateur et ce qu'il observe.

Ce que nous voyons ne dépend pas seulement de l'objet que nous regardons, mais également de nous — de notre position, notre mouvement et autres particularités plus personnelles. Parfois par une habitude instinctive, parfois à dessein, nous essayons d'éliminer de l'observation notre part personnelle de manière à former un tableau général du monde, indépendant de nous, et qui sera alors commun à tous les observateurs. Un point imperceptible à l'horizon de l'océan, nous l'interprétons comme un paquebot géant. De la portière de notre wagon nous voyons glisser un bœuf dans la prairie, à la vitesse de 80 km. à l'heure et nous faisons en même temps la remarque qu'il goûte le repos le plus complet. Nous voyons le ciel étoilé tourner autour de la Terre mais nous disons que c'est en réalité la Terre qui tourne et nous faisons ainsi un tableau de l'Univers que pourrait utiliser un astronome de n'importe quelle autre planète.

La première chose à faire pour grouper nos connaissances en un domaine commun, c'est d'en éliminer les différents points de vue personnels et de les rapporter à quelque observateur type bien défini. Le tableau du monde ainsi obtenu n'en est pas moins encore relatif, car nous n'avons pas éliminé complè-

tement la part de l'observateur ; nous n'avons fait que la fixer d'une manière définie.

C'est une tâche beaucoup plus ardue de forger une conception du monde complètement indépendante de tout point de vue particulier. On peut éliminer la position de l'observateur ; ainsi, nous pouvons nous représenter une chaise comme un objet bien défini, au milieu de la nature — vu en quelque sorte sous toutes ses faces à la fois et non d'une distance et sous un angle particuliers. Nous pouvons y penser, sans nous astreindre à nous placer mentalement à une certaine distance d'elle. C'est là une faculté remarquable qui nous est grandement facilitée par notre perception visuelle du relief. Quant au mouvement de l'observateur, on ne peut l'éliminer d'une manière aussi simple. Nous la croyions effectuée, cette élimination, mais la découverte, au chapitre précédent, que des observateurs animés de mouvements différents mesurent l'espace et le temps de manières différentes, nous a montré la question comme plus compliquée que nous ne l'avions cru tout d'abord. Elle peut nécessiter une modification complète de nos méthodes de description car tous les termes courants de la physique se rapportent essentiellement aux relations de l'Univers avec un observateur placé dans des conditions bien déterminées.

Sommes-nous capables d'aller plus loin et d'arriver à une conception de l'Univers qui, non seulement représente son aspect pour un observateur quelconque, mais n'introduise même pas la notion d'un point de vue déterminé ? Et si cette science est possible, serions-nous capables d'en comprendre la signification ? Et si nous pouvions la comprendre, aurait-elle pour n'importe qui un intérêt concevable ? Voilà des questions auxquelles nous n'avons pas besoin de répondre en ce moment. Leurs réponses ne sont pas nécessairement négatives, mais elles sortent complètement du domaine normal de la physique.

Les circonstances qui peuvent modifier le résultat des observations sont la position de l'observateur, son mouvement et la grandeur de ses étalons de mesure. Des particularités plus personnelles peuvent être éliminées, si, au lieu de ne compter que sur ses sens, il se sert d'un appareil de mesure scientifique. Mais l'appareil, si scientifique soit-il, n'en a pas moins une position, un mouvement, une grandeur, de sorte que ce sont encore là

des conditions influant sur le résultat de toute observation. Il n'y a pas, au fond, de différence essentielle entre les mesures scientifiques et les données immédiates de nos sens. Dans les deux cas, tout ce que nous pouvons connaître du monde extérieur suit pour nous atteindre des voies matérielles ; le corps de l'observateur peut être considéré comme une partie de l'équipement de son laboratoire, et, autant que nous pouvons nous en rendre compte, il paraît obéir aux mêmes lois que ce dernier. Nous pouvons, par suite, ranger dans le même groupe les perceptions directes et les mesures scientifiques, et quand nous parlons d'un « observateur particulier » nous comprenons dans cette expression ses procédés de mesure quels qu'ils soient.

Position, mouvement, grandeur des étalons — ce sont là des facteurs qui peuvent modifier profondément l'aspect sous lequel le monde se présente à nous. Pouvons-nous composer un tableau de l'Univers qui soit une synthèse de ce que voient des observateurs ayant toutes les positions, toutes les vitesses et toutes les tailles possibles ? Comme nous l'avons déjà montré, nous avons fait cette synthèse en ce qui concerne les positions. Nous avons deux yeux qui, depuis notre enfance, n'ont cessé de crier à notre cerveau que le monde devait être regardé de plus d'un point de vue. Notre cerveau a répondu en nous donnant la notion de relief qui nous permet d'apprécier d'une manière vivante le monde à trois dimensions, ce qui nous serait presque impossible si nous n'avions été habitués qu'à voir des tableaux à deux dimensions. Nous n'en déduisons pas simplement la réalité de l'Univers à trois dimensions : nous le voyons. Mais nous n'avons aucune aide semblable pour la synthèse correspondant aux différents mouvements. Si nous avions été dotés de deux yeux mobiles avec des vitesses différentes, peut-être notre cerveau aurait-il développé en nous la faculté nécessaire. Nous aurions perçu une sorte de relief de la quatrième dimension de manière à combiner et à grouper dans un seul et même tableau des choses vues avec des vitesses différentes. Enfin, si nos yeux avaient été de grandeurs différentes, il aurait pu se développer en nous la faculté de combiner les manières de voir du mammouth et du microbe.

Nous verrons que nos sens ne nous fournissent pas complètement le moyen de former un tableau impersonnel du monde,

et cette imperfection nous force à faire appel à une conception de l'Univers dépassant les images qui nous sont familières. Peut-être pourrons-nous concevoir un pareil Univers mais, sûrement, nous ne pourrons pas le dépeindre. Il serait absurde de limiter nos idées sur la nature aux seuls tableaux que nous donnent nos sens. Lodge n'a-t-il pas dit que c'était la lutte pour l'existence qui avait développé nos organes sensoriels et que ce développement n'avait pas eu pour but de permettre à l'homme de philosopher sur l'Univers ?

Comparons deux livres bien connus et que l'on pourrait appeler des traités élémentaires de la relativité, « *Alice in Wonderland* » et « *Gulliver's Travels* ». Alice changeait constamment de taille, tantôt géante et tantôt si petite qu'elle était sur le point de disparaître tout à fait. Gulliver, au contraire, avait toujours la même taille mais, dans ses voyages, il rencontra successivement une race d'hommes minuscules vivant dans un monde à leur échelle — et un pays où tout était démesurément grand. Il n'est pas difficile de nous rendre compte que les deux auteurs ont eu à décrire les mêmes phénomènes — dus à la disproportion de la taille de l'observateur et des dimensions des choses observées. Lewis Carroll s'est placé dans ce qui est probablement le point de vue scientifique ordinaire, en faisant grandir ou rapetisser son observateur au lieu d'opérer sur les dimensions de tout ce qui entourait celui-ci. Mais c'est là un point de vue que ne pouvait concevoir Alice car il lui était impossible « de sortir d'elle-même et de se voir » sous l'aspect d'une géante remplissant la chambre où elle était. Pour elle, c'était cette chambre qui s'était rétrécie d'une manière inexplicable. Swift a fait une hypothèse qui semble plus vraisemblable à l'esprit humain, en nous montrant un Gulliver qui attribue les changements qu'il observe aux choses qui l'entourent. Il ne serait jamais venu à l'idée de Gulliver que ce pouvait être sa propre taille qui eût changé ; et si même, il avait pensé à cette explication, c'est à peine s'il aurait pu s'habituer à cette manière de voir. Les deux points de vue sont pourtant légitimes. Les dimensions d'un objet ne peuvent être conçues que relativement à un autre objet et il n'y a aucune raison d'attribuer le changement à l'un des objets plutôt qu'à l'autre.

Nous avons vu dans la théorie de l'expérience de Michelson-

Morley que, conformément aux conceptions ordinaires en Physique, notre étalon de longueur — la règle rigide — devait varier suivant les conditions de son mouvement ; l'histoire de l'aviateur nous a montré un changement semblable dans l'étalon de temps. Quelques perturbations, d'origine inconnue et embarrassante, ont été découvertes dans les mouvements apparents du Soleil, de Mercure, de Vénus et de la Lune ; mais un air de famille unit étrangement ces perturbations et nous sommes amenés à penser que la cause réelle de ces phénomènes pourrait bien être un défaut de constance dans la vitesse de rotation de notre horloge-étalon, la Terre. Il ne serait pas difficile de multiplier les exemples qui nous prouvent qu'un changement dans les dimensions de l'observateur ou de ses étalons peut produire ou cacher des modifications du monde extérieur.

L'objet de la théorie de la relativité n'est pas d'entreprendre cette tâche ardue et sans espoir de répartir la responsabilité entre l'observateur et tout ce qu'il observe, mais de bien mettre en valeur ce point : aussi bien dans notre description ordinaire que dans la description scientifique des phénomènes naturels, ces deux facteurs se trouvent unis d'une manière indissoluble. Tous les termes courants de la physique — longueur, durée, mouvement, force, masse, énergie, etc. — se rapportent à cette science relative du monde et il reste à voir si l'une quelconque de ces notions peut être conservée dans une description de l'Univers qui ne soit plus spéciale à un observateur particulier.

La première chose à obtenir est donc une description indépendante du mouvement de l'observateur. L'indépendance par rapport à la grandeur de ses étalons sera examinée dans la théorie discutée au Chapitre XI. Traçons un carré ABCD sur une feuille de papier, en lui donnant des côtés aussi égaux que possible. Nous savons que notre aviateur, volant à la vitesse de 260.000 km. par sec. dans la direction AB, estimerait que les côtés AB, DC se sont contractés de la moitié de leur longueur, de sorte que pour lui la figure serait un rectangle. Si l'on faisait tourner le carré d'un angle droit dans son plan, AB et DC se dilateraient et les deux autres côtés se contracteraient — selon l'aviateur. Pour nous les longueurs AB et AC sont égales ; pour lui, une des longueurs est double de l'autre. Il est donc clair que la longueur n'est pas une propriété inhérente

à notre tracé ; elle nécessite la spécification de quelque observateur. Nous avons vu plus haut que la mesure d'un intervalle dans le temps exigeait également qu'un observateur soit spécifié. L'observateur stationnaire et l'aviateur n'étaient pas d'accord sur celui dont le cigare avait duré le plus longtemps.

Ainsi, *longueur* et *durée* ne sont pas des qualités inhérentes au monde extérieur ; ce ne sont que des rapports entre les objets de ce monde et quelque observateur bien déterminé. Si l'on a bien compris ce point, tout mystère disparaît dans les phénomènes décrits au Chapitre I. Quand la règle, dans l'expérience de Michelson-Morley, pivote d'un angle droit, elle se contracte ; on a l'impression qu'elle a subi une modification. Evidemment rien n'est arrivé à la règle elle-même — qui est ici l'objet du monde extérieur. Seule, sa longueur s'est trouvée modifiée mais cette longueur n'est pas une propriété intrinsèque de la tige puisqu'elle est complètement indéterminée tant qu'il n'y a aucun observateur spécifié. Dans la rotation de la règle, c'est le rapport qui existe entre elle et l'observateur (dont nous avons supposé l'existence dans la discussion de l'expérience), qui se trouve altéré ; elle-même, c'est-à-dire le lien qui unit une molécule d'une de ses extrémités à une molécule de l'autre, n'est pas modifiée. Une mesure de longueur et de durée n'est qu'une comparaison avec des divisions de l'espace et du temps tracées par l'observateur considéré avec l'aide d'appareils qui partagent son propre mouvement. La nature n'a que faire de ces divisions ; elle a, comme nous le verrons plus loin, une géométrie propre qui est d'un type tout autre.

En physique, jusqu'ici, on a supposé que tous les observateurs n'étaient pas équivalents et qu'il existait quelque observateur absolu dont on devait respecter les jugements dans la détermination des longueurs et du temps, sous prétexte que la nature tenait compte de *ses* divisions de l'espace et du temps. On le supposait au repos dans l'éther qui matérialisait en quelque sorte ces divisions et leur donnait une signification réelle dans le monde extérieur. Ce n'est là qu'une pure hypothèse qui ne s'appuie, comme nous le verrons, sur aucun fait. Le seul but de notre activité étant évidemment de poursuivre nos investigations, nous ne ferons appel à cet observateur hypothétique

que si nous le jugeons indispensable pour expliquer quelque phénomène.

Nous avons conduit le lecteur depuis les points de vue de la physique classique jusqu'à ceux de la relativité et peut-être se demande-t-il si les étranges phénomènes de contraction que nous avons décrits dans le chapitre précédent, doivent être pris au sérieux ou s'ils ne sont qu'une partie d'un raisonnement par l'absurde. Notre réponse est celle-ci : nous croyons bien que ces phénomènes doivent se présenter comme nous les décrivons, seulement la description (comme celle de tous les phénomènes observés) fait intervenir les rapports entre le monde extérieur et quelque observateur, et non pas le monde extérieur lui-même. Le caractère étrange et déconcertant de ces phénomènes provient de la conclusion naturelle mais fallacieuse qu'ils se rapportent à des modifications intrinsèques des objets eux-mêmes.

Nous avons jusqu'ici étudié l'observation principalement au point de vue de l'observateur ; nous devons maintenant nous occuper de l'autre élément, la chose observée. Bien que la longueur et la durée n'aient pas d'équivalents exacts dans le monde extérieur, il y a pourtant un certain ordre des choses et des événements indépendants de nous et nous devons maintenant chercher des termes mieux appropriés pour en faire la description. La multiplicité des événements est d'ordre 4 en ce sens qu'elle répond aux expressions de : à droite et à gauche — en arrière et en avant — au-dessus et au-dessous — plus tôt et plus tard. On peut tout d'abord considérer comme indépendants ces quatre ordres, mais bien vite on reconnaîtra la nécessité et on essaiera de les combiner. On voit immédiatement qu'il n'y a pas de différence essentielle entre « à droite et à gauche » et « en avant et en arrière ». L'observateur n'a qu'à pivoter d'un quart de tour pour voir s'échanger les deux expressions. S'il tourne d'un peu moins il a d'abord à les combiner et ensuite à les séparer de nouveau d'une manière différente. Ce serait évidemment bien ennuyeux de faire constamment cette combinaison puis cette division, aussi nous sommes-nous habitués à l'idée de les laisser combinés dans un ordre double ou à deux dimensions. Il est moins facile d'amalgamer l'expression « au-dessus et au-dessous ». Nous avons manifestement des

raisons de considérer cette nouvelle dimension de l'Univers comme essentiellement distincte des deux autres. Quel gros obstacle au développement de la science, pourtant, s'il avait fallu que l'esprit se soit refusé à concevoir un espace à trois dimensions ! Cette dernière combinaison n'a pas caché la distinction réelle qui existe entre l'horizontale et la verticale, mais elle nous a rendus capables de saisir d'une manière plus profonde sa nature — les phénomènes qui en dépendent et ceux qui n'en dépendent pas. Nous pouvons également concevoir comment un observateur situé dans un autre lieu, opérerait la décomposition de cette combinaison suivant une nouvelle verticale et une nouvelle horizontale. Nous devons maintenant faire un pas de plus et combiner également le quatrième ordre : « plus tôt et plus tard ». C'est à cette combinaison que l'esprit se montre le plus rebelle ; elle ne signifie pas en effet qu'il n'existe aucune distinction entre l'espace et le temps mais elle apporte une aide nouvelle et impartiale pour déterminer la nature de cette distinction.

Ce n'est pas une idée neuve, cette union de l'espace et du temps où ce dernier est considéré comme une quatrième dimension. Néanmoins, tout dernièrement encore, on n'y voyait qu'une manière pittoresque de regarder les choses, sans y attacher autrement d'importance. Nous pouvons combiner le temps et la température sur la feuille d'un thermomètre enregistreur, la pression et le volume dans le diagramme d'un indicateur de Watt. Tout cela ne nous engage à rien, tandis que notre théorie actuelle nous permet d'aller plus loin. Nous pouvons superposer des surfaces à deux dimensions (par exemple des feuilles de papier) et construire un ensemble à trois dimensions. Il y a pourtant une différence entre cet ensemble de feuilles de papier et un bloc massif de carton. Le bloc massif est l'analogue de notre combinaison quadridimensionnelle de l'espace et du temps ; elle ne se divise pas *naturellement* en une série de feuillets-espaces à trois dimensions, empilés les uns sur les autres suivant l'ordre du temps ; il nous est possible de la décomposer *artificiellement* en une pareille pile *mais dans toutes les directions que nous voudrons.*

L'observateur en changeant son orientation créait une nouvelle division du plan à deux dimensions en « à droite et à gau-

che », « en avant et en arrière » ; en changeant sa longitude il crée une nouvelle division de l'espace à trois dimensions par la distinction de la verticale et de l'horizontale ; en *changeant son mouvement* il créera une nouvelle division de l'ordre à quatre dimensions en temps et espace.

Ce point sera justifié plus loin ; il nous montre que des observateurs animés de mouvements différents auront aussi des manières différentes de mesurer le temps et l'espace, conclusion déjà atteinte d'un tout autre point de vue.

Bien que les différents observateurs séparent les quatre ordres d'une manière différente, il y a un fait sur lequel ils sont tous d'accord : c'est que l'ensemble des événements est d'ordre quatre et, comme nous le voyons, cet ordre quadruple indissoluble est le même pour tous ; nous en déduisons qu'il est inhérent à la nature du monde extérieur et nous avons ainsi réalisé le tableau synthétique que nous cherchions des divers aspects de l'Univers pour des observateurs ayant toutes les positions et tous les mouvements (uniformes) possibles. C'est ce que l'on peut regarder comme une conception du monde réel, indépendante des conditions d'observation.

L'expression « monde réel » est prise ici dans le sens qu'elle a ordinairement en physique ; il n'y faut voir aucun jugement philosophique au sujet de la réalité elle-même. On y retrouve le même degré de réalité que nous avions attribué au monde à trois dimensions de la théorie scientifique ou de la conception ordinaire, dont ce monde réel a pris la place par suite du progrès de nos connaissances. Comme je l'ai déjà dit, c'est uniquement cet accident qui nous a privés d'une paire d'yeux doués l'un par rapport à l'autre d'un mouvement rapide, qui a permis à notre cerveau de négliger le développement de cette faculté d'une vision du monde à quatre dimensions aussi directe que celle de sa section à trois dimensions.

Il est maintenant facile de voir que la longueur et la durée doivent être les composantes d'une entité unique, d'un Univers à quatre dimensions. De même que nous pouvons figurer un solide quelconque par son plan et son élévation, nous représenterons une étendue de l'Univers à quatre dimensions au moyen de l'espace et de la durée. Un solide a une grandeur et une forme indépendantes du choix de la verticale ; il en est de

même pour l'espace-temps. L'espace et la durée n'ont qu'un caractère relatif ,mais l'étendue dont elles sont les composantes a une signification absolue dans la nature, indépendante de la décomposition particulière en espace et en temps effectuée par l'observateur.

Considérons deux événements, par exemple les coups de 1 heure et de 2 heures frappés par Big-Ben au carillon de Westminster ; ces deux événements occupent deux points bien distincts de l'espace-temps. Un observateur à Westminster les considère comme se produisant au même endroit et séparés par une durée d'une heure ; il décompose donc leur intervalle à quatre dimensions en une distance spatiale nulle et une distance dans le temps d'une heure. Pour un observateur situé sur le Soleil, ils ne se produisent pas au même endroit ; ils sont distants de 110.000 km., quantité égale au déplacement de la Terre sur son orbite dans son mouvement autour du Soleil. Il est évident que l'observateur solaire et l'observateur terrestre ne réalisent pas suivant les mêmes directions la décomposition du vecteur d'Univers qui joint les deux événements puisque, pour l'un des observateurs, la composante d'espace est nulle, pour l'autre, elle est de 110.000 km.. Mais, si l'une des composantes est altérée, nécessairement l'autre l'est aussi, de sorte que pour l'observateur solaire la composante de temps sera légèrement différente d'une heure ; par analogie avec la décomposition correspondante de l'espace à trois dimensions, nous devrions nous attendre à ce qu'il trouve moins d'une heure — comme s'il avait pris du temps pour faire de l'espace ; en fait il trouve plus d'une heure, ce qui tient à ce que l'espace-temps et l'espace ordinaire ont des géométries différentes, comme nous le montrerons plus tard. Ce que nous voulions montrer ici, c'était que deux événements n'ont qu'une distance dans l'espace-temps à quatre dimensions, celle-ci pouvant être résolue d'une infinité de façons en composantes de longueur et de durée.

Nous voyons de plus comment le mouvement peut être purement relatif. Prenons deux événements A et B de l'histoire d'une particule. Nous pouvons choisir comme axe des temps une direction absolument arbitraire ; prenons-la suivant AB. Par conséquent A et B sont séparés dans le temps et non dans

l'espace : la particule est au repos. Si nous prenons pour axe des temps une direction légèrement inclinée par rapport à la précédente, l'intervalle AB aura une composante d'espace : la particule est en mouvement. Il ne peut exister aucun mouvement absolu puisque nous avons la possibilité de choisir arbitrairement la direction de l'axe des temps. Nous pouvons voir maintenant ce qui détermine la décomposition en espace et en temps pour un observateur particulier. Supposons que cet observateur se place de telle manière qu'il se croit vraiment au repos. Si c'est, par exemple, un être humain normal, il s'assiéra simplement dans un fauteuil ; si c'est un astronome il ira se placer sur le Soleil, ou mieux, au centre de l'Univers stellaire. Alors, tout ce qui lui arrivera personnellement constituera une suite d'événements ayant lieu, dans son idée, au même endroit. Ces événements auront des coordonnées d'espace toutes nulles ; ils seront, par conséquent, distribués tous sur l'axe des temps, et c'est même cette suite d'événements qui déterminera l'axe des temps dans le monde à quatre dimensions. Chaque observateur basera donc sa décomposition en espace et en temps sur cette ligne d'Univers qui lui est propre.

Puisque toute décomposition en espace et temps est acceptable, l'astronome peut baser la sienne sur la ligne d'Univers d'un observateur solaire au lieu de la baser sur celle d'un observateur terrestre ; on doit alors se rappeler que l'espace et le temps de l'observateur solaire doivent être déduits indirectement de ceux de l'observateur terrestre ; et, si les corrections sont faites suivant les méthodes grossières et imparfaites dont nous nous sommes servis jusqu'ici, ces déductions peuvent se trouver faussées (si une exactitude extrême leur est nécessaire).

L'objection la plus grosse qu'on a pu faire à la théorie relativiste, est soulevée par la question de l'éther. Nous avons vu que le mouvement uniforme à travers l'éther ne peut être mis en évidence expérimentalement ; il est, par conséquent, absolument conforme à l'expérience qu'un tel mouvement ne puisse se représenter dans le monde à quatre dimensions. Pourtant, il semble presque, s'il y a un éther, qu'un pareil mouvement doive logiquement exister. C'est là un point sur lequel doit insister, même au détriment de la simplicité de la forme, toute

théorie qui prétend donner l'explication complète des phénomènes de la nature. S'il existe un éther réel analogue à un océan matériel, il doit en quelque sorte rendre palpable une étendue déterminée ; et, que l'observateur ou la nature tienne compte ou non de cette étendue, il n'existe pas moins là une distinction fondamentale entre l'espace et le temps. Quelques-uns voudraient trancher la question en niant purement et simplement l'existence de l'éther. Il nous semble que ce ne soit pas la solution désirable ni même, autant que nous pouvons le voir, possible ; mais ce que nous tenons essentiellement à rejeter, c'est un éther doué de la propriété de créer une séparation en espace et temps telle que celle que nous avons supposée. Dire que cette division existe quand on n'a encore trouvé aucun phénomène qui paraisse en avoir tenu compte, voilà qui semble bien un abus de langage.

Les mathématiciens du XIX[e] siècle ont passé beaucoup de temps à développer des théories d'un éther rigide et élastique, ou autre. Les ondes lumineuses étaient alors des oscillations réelles de cette substance ; on lui attribuait les propriétés ordinaires de la rigidité et de la densité ; on allait même parfois jusqu'à lui assigner une place dans le tableau des éléments. Un coup fatal fut porté à cette conception matérialiste quand on essaya d'expliquer la matière comme quelque état particulier de l'éther, car si la matière est représentée par un mouvement tourbillonnaire ou une condensation de l'éther, celui-ci ne peut pas lui-même être matériel — ne peut pas être quelque état en lui-même. Quand on regarde une propriété quelconque de la matière comme explicable par une théorie de sa structure, on ne doit évidemment pas attribuer cette même propriété à l'éther. Si la physique édifie une théorie de la matière qui en explique quelque propriété, elle se rend absurde et se condamne elle-même quand elle vient attribuer, sans l'expliquer, la même propriété au milieu à partir duquel elle construit la matière.

D'ailleurs, l'éther a cessé de jouer un rôle prépondérant dans les théories physiques ; on l'a en quelque sorte mis de côté, en réserve. Un auteur moderne d'une théorie électromagnétique partira en général de l'hypothèse d'un éther remplissant l'espace entier ; il montrera ensuite qu'il y a en chacun de ses points un vecteur électromagnétique dont on peut mesurer l'intensité ;

à partir de là il ne raisonnera plus que sur ce vecteur et probablement n'entendra-t-on plus parler de l'éther lui-même. On suppose d'une manière vague que ce vecteur représente quelque état de l'éther ; inutile de contester la nécessité de cette notion secondaire de l'éther pour rendre intelligible la signification du vecteur ; l'essentiel, c'est que l'éther, maintenant, n'est plus qu'à l'arrière-plan ; il ne joue plus un rôle principal dans la théorie.

Il n'y a, par conséquent, aucune raison d'attribuer à ce fond de tableau vague que constitue l'éther, les propriétés d'un océan matériel. Ses propriétés doivent être déterminées par l'expérience, et non par l'analogie. En particulier, il n'y a aucune raison de supposer qu'il peut diviser l'Univers en espace et temps, comme le ferait un océan matériel .Dans le Prologue, nous avons vu que la géométrie naturelle dépend des lois de la matière ; aussi ne faut-il pas l'appliquer à l'éther. L'identité permanente des particules est une propriété de la matière, que Lord Kelvin croyait du reste avoir expliquée par son hypothèse de l'anneau tourbillonnaire. Cette hypothèse fut abandonnée ; du moins nous a-t-elle appris que l'on ne doit pas considérer cette permanence comme un axiome, car elle peut être le résultat d'un mécanisme compliqué. Il n'est pas nécessaire qu'il y ait quelque propriété correspondant à cette identité permanente, relative aux parties constitutives de l'éther ; nous ne pouvons pas placer notre doigt en un certain point et dire que « cette partie d'éther se trouvait là-bas quelques secondes avant ». Ce défaut d'identité dans les parties constitutives de l'éther enlève toute signification à un mouvement par rapport à lui, et il paraît vraisemblable que ce soit là la véritable raison pour laquelle aucune expérience ne révèlera jamais un pareil mouvement.

La théorie moderne de la relativité de tout mouvement uniforme n'est au fond qu'un retour aux vues originales de Newton, troublées pendant un certain temps par l'introduction des problèmes de l'éther ; dans la dynamique newtonienne, le mouvement uniforme d'ensemble d'un système n'a aucun effet (et personne ne s'attendrait à ce qu'il en eût). Mais la limitation au mouvement uniforme fait surgir d'immenses difficultés dont Newton lui-même semble avoir entrevu la grandeur ; malheu-

reusement les preuves expérimentales lui parurent de nature à lui interdire toute extension du principe. Par suite, les lois de la mécanique newtonienne ne sont pas du type le plus général où il ne soit plus nécessaire de particulariser l'observateur ; elles ne sont valables que pour des observateurs doués d'un genre particulier de mouvement dit « non accéléré ». La seule définition que l'on puisse donner de cette épithète est que l'observateur « non accéléré » est celui pour lequel les lois de la mécanique newtonienne sont valables. Dans cette théorie les phénomènes ne sont plus indifférents à un mouvement d'ensemble non uniforme ou accéléré du système. Pourtant un mouvement non uniforme absolu à travers l'espace est impossible à concevoir au même degré qu'un mouvement uniforme absolu. La relativité partielle des phénomènes rend la difficulté encore plus grande. Si nous refusons d'admettre l'existence d'un milieu fondamental doué d'une identité continue de ses parties constitutives, le mouvement uniforme ou non uniforme ne peut avoir aucune signification ; si, au contraire, nous admettons la réalité d'un pareil milieu, l'un ou l'autre peut être mis en évidence ; mais il est beaucoup plus difficile d'imaginer un schéma du monde dans lequel le mouvement uniforme n'aurait aucune signification alors que le mouvement non uniforme en aurait une.

C'est l'expérience qui nous a ramenés au principe de relativité pour le mouvement uniforme ; arrivés à ce point nous avons cherché une extension possible de ce principe au mouvement accéléré car nous sentions qu'il était difficile et arbitraire de nous arrêter là. Nous essayons maintenant de concevoir un système de la nature qui soit indifférent au genre du mouvement animant l'observateur. Nous aurons alors la synthèse complète de ce que perçoivent des observateurs ayant les uns par rapport aux autres tous les genres possibles de mouvement sans nous en tenir seulement aux mouvements uniformes. Une fois déduites les conséquences de cette généralisation il restera évidemment à les vérifier expérimentalement.

Il parut longtemps impossible de formuler une pareille théorie. Newton avait montré que s'il n'y avait aucun criterium permettant de reconnaître l'état de repos ou de mouvement uniforme d'un corps, on pouvait pourtant mettre aisément en évi-

dence sa rotation. Ainsi l'existence d'un renflement équatorial de la Terre est un indice de sa rotation puisque tout corps plastique au repos doit être parfaitement sphérique.

Ce problème de la rotation nous permet d'entrevoir la cause de la relativité incomplète de la mécanique de Newton. Les lois du mouvement sont rapportées à un observateur non accéléré et ne s'appliquent pas à un système de référence tournant avec la Terre. Cependant, souvent le mathématicien fait usage d'un tel système en rotation. Il lui faut alors apporter une certaine modification aux lois et c'est ce qu'il fait en introduisant une force centrifuge — non pas considérée comme une force réelle de même espèce que la gravitation, mais comme une fiction mathématique imaginée pour corriger le choix impropre du système de référence. Le renflement équatorial de la Terre peut aussi bien être attribué à la rotation de la Terre qu'à une poussée interne de la force centrifuge que l'on doit faire intervenir quand on refuse à la Terre tout mouvement de rotation.

C'est une chose généralement admise que la force centrifuge est une grandeur *sui generis* que l'on peut toujours distinguer expérimentalement de tout autre phénomène naturel. Si donc, dans le choix d'un système de référence, nous trouvons que l'on peut mettre en évidence une force centrifuge, nous pouvons en déduire immédiatement que le système de référence est « impropre » ; les systèmes animés ou non d'un mouvement de rotation peuvent être distingués expérimentalement et la rotation est ainsi rigoureusement absolue. Tout ceci suppose que les effets observés de la force centrifuge ne peuvent se trouver produits par aucun autre moyen que par la rotation du système de référence de l'observateur. Si l'on admet qu'il est impossible de distinguer nettement par l'expérience la force centrifuge d'un autre genre de force — gravitation — que peut percevoir même l'observateur non accéléré de Newton, l'argument cesse d'être applicable ; nous ne pouvons déterminer d'une manière exacte pour combien la force centrifuge et pour combien la gravitation entrent dans la constitution du champ de force observé, et nous ne pouvons définir expérimentalement un système-étalon que nous puissions considérer comme absolument privé de rotation.

La question de l'existence d'une distinction entre les systèmes de référence « propres » et « impropres » se trouve ramenée à celle-ci : les effets expérimentaux dûs à l'emploi d'un système de référence impropre sont-ils perçus différemment des effets naturels que l'on peut percevoir avec un système de référence propre ? S'il n'existe aucune différence de ce genre, tous les systèmes peuvent être regardés comme équivalents et également « propres ». Nous avons dans ce cas une relativité complète des phénomènes naturels. Comme le rejet du système fondamental de Newton a pour conséquence l'introduction d'un champ de force, un des sujets principaux de la théorie de la relativité généralisée sera évidemment l'étude de la nature des champs de force.

La signification précise de cette proposition que tous les systèmes de référence sont équivalents, est assez difficile à saisir. Nous présumons qu'il existe dans l'Univers des entités absolues — non seulement la matière, mais aussi d'autres particularités de l'espace vide ou éther. Dans l'atmosphère un système de référence mobile entraîné par l'air peut être distingué d'autres systèmes se mouvant d'une manière différente car il ne remplit pas seulement ses fonctions normales de système de référence, il incarne en outre certaines des propriétés absolues de la matière qui se trouve dans cette région. De même, si dans un espace vide nous choisissons un système de référence qui suit plus ou moins les lignes de la structure absolue de la région où il se trouve, il s'appropriera quelques-unes des propriétés absolues de cette structure. Ce que nous entendons par équivalence de tous les systèmes, c'est que ceux-ci ne peuvent être différenciés par aucune des qualités que l'on supposait autrefois liées d'une manière intrinsèque aux systèmes eux-mêmes — repos, orthogonalité, accélération — et indépendante de la structure absolue de l'Univers qui s'y rapporte. Par conséquent si l'on ne peut attribuer des propriétés absolues au système de référence newtonien, ce n'est pas parce qu'il est impossible d'assigner de telles propriétés à un système quelconque, c'est que le système newtonien a été construit sur la base de la science relative, sans qu'on ait essayé de suivre des lignes de structure absolues.

La force telle que nous la révèle l'observation est, comme

toutes les autres quantités physiques, une relation. La force mesurée avec un dynamomètre à ressort par exemple, dépend essentiellement de l'accélération de l'observateur qui tient l'instrument ; ce terme peut, comme la longueur et la durée, n'avoir aucun équivalent exact dans une description de la nature indépendante de tout observateur. Pour Newton il existe un tel équivalent : c'est une cause agissante dans la nature, identique à la force perçue par son observateur-étalon non accéléré. Bien que tout autre observateur perçoive cette force avec des modifications personnelles, il est sous-entendu que la force primitive et les modifications additionnelles dues à l'observateur peuvent être en quelque sorte séparées sans ambiguité. Cette séparation ne s'appuyant sur aucune base expérimentale, un champ de force, du point de vue de la relativité, n'est comme la longueur et la durée qu'un lien entre la nature et l'observateur. Il y a naturellement quelque chose à l'extrémité de ce lien opposée à la nôtre, de même que nous avions trouvé une extension quadridimensionnelle à l'extrémité du lien correspondant à la longueur et à la durée. Nous aurons à étudier la nature de cette inconnue dont la relation avec nous apparaît sous forme de force. En attendant, nous admettrons que les modifications dans la perception de la force dues au mouvement non uniforme de l'observateur, de même que celles de la longueur dues à son mouvement uniforme, sont précisément ce que nous pouvons attendre de la nature relative de ces quantités.

Nous en arrivons maintenant à l'étude détaillée de l'Univers à quatre dimensions, de ce qu'il renferme, de ses lois. Il est nécessaire de pénétrer dans cet Univers absolu pour y chercher l'explication de la nature ; mais l'objet du physicien est toujours d'acquérir des connaissances qu'il puisse appliquer à l'aspect relatif et familier du monde. L'Univers absolu est d'une nature tellement différente, que cet Univers relatif auquel nous sommes habitués paraît presque un rêve. Si alors nous rêvons vraiment, c'est notre rêve surtout qui nous intéresse. Il n'est pas nécessaire que les physiciens énoncent toujours leurs résultats dans le langage de l'espace à quatre dimensions, pour le vain plaisir de travailler dans le domaine de l'absolu. C'est plutôt le contraire. Qu'ils explorent le nouveau champ et qu'ils y glanent quelques généralisations simples afin de les appliquer au monde

à trois dimensions ordinaire. Ils y trouveront une lumière directrice dans leurs essais de construction d'un schéma des phénomènes. Pour le reste, les physiciens continueront impassiblement à explorer le monde relatif et à parler un langage applicable à la science relative, mais avec une notion plus complète de sa relativité.

CHAPITRE III

L'Univers a quatre dimensions.

Here is a portrait of a man at eight years old, another at fifteen, another at seventeen, another at twenty-three, and so on. All these are evidently sections, as it were, Three-Dimensional representations of his Four-Dimensional being, which is a fixed and unalterable thing [1].

H.-G. Wells (*The Time machine*).

La distinction que nous faisons entre l'horizontale et la verticale n'est pas une simple illusion, et l'homme qui pense pouvoir la négliger me paraît voué à une mort prématurée. Nous ne pouvons pourtant comprendre les phénomènes de la nature que si nous combinons les dimensions horizontales et verticales dans un espace à trois dimensions. C'est ainsi que nous saisissons d'une manière plus profonde le caractère de cette distinction qui différencie l'horizontale de la verticale dans les cas où une pareille distinction doit être envisagée — par exemple, dans le mouvement des projectiles. Nous reconnaissons également que la verticale n'est pas, comme se l'imaginaient les philosophes pour qui la Terre était plate, une direction universellement privilégiée de l'espace.

Si, d'une manière analogue, nous combinons l'ordre des événements dans le temps et dans l'espace pour en former un ordre unique à quatre dimensions, nous n'obtiendrons pas seulement une explication plus simple des phénomènes dans lesquels on ne peut séparer l'idée de temps de celle d'espace, mais

[1] Voici les différents portraits d'un homme pris à huit ans, à quinze, à dix-sept, à vingt-trois et ainsi de suite. De toute évidence, ce sont là pour ainsi dire des sections, des représentations tridimensionnelles de son être à quatre dimensions qui, lui, est fixe et immuable.

nous comprendrons mieux la nature de cette séparation dans les phénomènes où elle intervient.

Un point dans l'espace-temps, c'est-à-dire un lieu déterminé pris à un instant déterminé, sera nommé un « événement ». Dans son sens habituel, un événement est un accident physique qui se produit en un lieu et à un instant déterminés et peut servir à caractériser ceux-ci. Nous emploierons le mot dans ses deux sens car il est difficile de considérer un point dans l'espace-temps sans imaginer en même temps qu'il s'y trouve ou s'y passe quelque chose.

Dans la géométrie ordinaire à deux ou trois dimensions, la distance entre deux points est quelque chose que l'on peut, en général, mesurer avec une règle graduée rigide ; on la suppose la même pour tous les observateurs et il n'est pas nécessaire pour cela de spécifier les directions verticale et horizontales, ou un système particulier de coordonnées. Dans l'espace-temps à quatre dimensions il y a également une distance généralisée de deux événements dont les distances dans l'espace et dans le temps sont des composantes particulières. Cette extension de la notion de distance dans l'espace-temps est ce que l'on appelle « l'intervalle » des deux événements ; il est le même pour tous les observateurs quelle que soit la manière dont ils le décomposent par rapport au temps et à l'espace pris séparément. Nous pouvons regarder l'intervalle comme une quantité possédant une forme extérieure qui lui est propre — une relation absolue entre les deux événements, qui ne nécessite aucun observateur particulier. Sa mesure pratique nous est suggérée par l'analogie qu'elle présente avec la distance de deux points dans l'espace.

Dans l'étendue à deux dimensions, sur un plan par exemple, deux points P_1 et P_2 (Fig. 2) peuvent être définis par leurs coordonnées rectangulaires (x_1, y_1) et (x_2, y_2), une fois choisi un système d'axes rectangulaires quelconque. Dans la figure $OX_1 = x_1$, $OY_1 = y_1$, etc... Nous avons :

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1M}^2 + \overline{MP_2}^2 = \overline{X_1X_2}^2 + \overline{Y_1Y_2}^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

de sorte que s étant la distance entre P_1 et P_2 :

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

L'extension à l'espace à trois dimensions est, comme nous pouvons le prévoir :

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

En introduisant les instants t_1 et t_2 des deux événements nous pourrions naturellement nous attendre à ce que leur intervalle dans l'Univers à quatre dimensions soit donné par :

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (t_2 - t_1)^2.$$

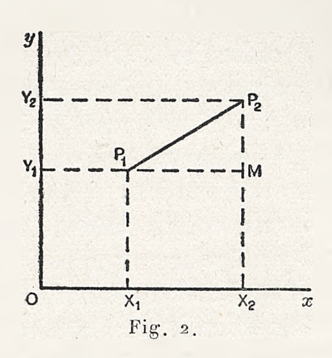


Fig. 2.

Mais ici se pose une question capitale. Nous admettions, bien entendu, que z y z étaient mesurés avec la même règle ; mais comment se servir de cette même règle pour mesurer t ? Impossible de nous servir d'une règle ; c'est une horloge qu'il nous faut. La relation la plus naturelle que l'on puisse concevoir entre le temps et la longueur nous est fournie par ce fait que la lumière parcourt 300.000 km. en une seconde. Par suite, dans l'Univers à quatre dimensions, nous regarderons une seconde comme équivalente à 300.000 km. et nous mesurerons les longueurs et les temps indifféremment en secondes ou en kilomètres ; en d'autres termes nous prenons la vitesse de la lumière comme vitesse unité. Cette convention n'est pas nécessaire, mais elle apporte une grosse simplification dans la discussion du problème.

En second lieu, les formules que nous avons données pour s^2 caractérisent la géométrie euclidienne. Tant que nous avons affaire à l'espace à trois dimensions, cette géométrie est applicable comme le confirment les expériences les plus précises. L'espace-temps, lui, n'est pas euclidien ; il est conforme (du

moins d'une manière très approchée) à une modification très simple de la géométrie euclidienne traduite par la formule :

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (t_2 - t_1)^2.$$

Il n'y a qu'un signe de changé mais ce signe moins est le secret des différences que présentent les manifestations du temps et de l'espace dans la nature.

Ce changement de signe est une question qui déconcerte souvent dès le début. Nous ne pouvons pas définir s par l'expression que nous avons écrite en premier (avec le signe plus) car cette expression ne traduit aucun fait objectif ; en prenant l'espace-temps d'un observateur on trouve une certaine valeur ; celui d'un autre observateur nous en donne une autre. Si au contraire s est défini par la deuxième expression, les deux observateurs trouvent le même résultat (1). La quantité s ne dépend donc que des deux événements considérés et nous pouvons lui donner un nom — l'intervalle entre les deux événements. La propriété correspondante dans l'espace ordinaire, c'est la distance entre deux points : elle ne dépend également que des deux points considérés et pas du tout du système de coordonnées choisi. L'intervalle tel que nous l'avons défini, est donc l'analogue de la distance et cette analogie se poursuit et se précise dans la ressemblance manifeste des formules donnant s^2 dans les deux cas. De plus, quand la distance dans le temps s'annule, l'intervalle des deux événements devient leur distance dans l'espace. La différence de signes introduit cependant des modifications importantes, modifications qui se trouvent résumées dans cette proposition que la géométrie de l'espace est euclidienne, tandis que celle de l'espace-temps est semi-euclidienne ou « hyperbolique » (2). L'association d'une géométrie à un continuum quelconque implique toujours l'existence de quelque quantité mesurable d'une manière invariante telle que l'intervalle ou la distance. Dans l'espace ordinaire, une géométrie dont on aurait retiré la notion de distance, n'aurait plus aucun sens.

(1) Appendice. Note 2.

(2) Dans la suite, l'espace-temps caractérisé par l'invariant :

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (t_2 - t_1)^2$$

nous l'appellerons espace-temps (ou Univers) euclidien.

(Note du Trad.).

Pour le moment, la difficulté de parler le langage d'une géométrie qui ne nous est pas familière, peut être évitée grâce à un artifice. Au lieu du temps réel t nous considérons un temps imaginaire τ; autrement dit nous posons :

$$t = i\tau = \tau\sqrt{-1}.$$

Alors : $$(t_2 - t_1)^2 = -(\tau_2 - \tau_1)^2$$

et $$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (\tau_2 - \tau_1)^2.$$

La formule est maintenant symétrique et rien ne distingue plus τ des autres variables. Le continuum formé par l'espace et le temps imaginaire est parfaitement isotrope pour toutes ses mesures ; on n'y peut trouver aucune direction essentiellement distincte des autres.

Un observateur peut décomposer ce continuum en espace et en temps en y pratiquant une section « plane » perpendiculaire à une certaine direction, par exemple normale à sa propre ligne d'Univers en un point de celle-ci. Cette section donne un espace à trois dimensions à un certain instant et la direction normale, le temps imaginaire. Evidemment la section peut être faite perpendiculairement à n'importe quelle direction ; toutes les décompositions en espace et temps ainsi obtenues sont également légitimes. Il n'y a plus de conspiration de la part des forces de la nature pour nous cacher notre mouvement absolu car dans le point de vue plus large que nous avons adopté, il n'y a plus rien à cacher. Libre à l'observateur d'orienter ses axes rectangulaires x, y, z, t, comme bon lui semble ; sa liberté n'est pas moins grande que dans le choix complètement arbitraire de ses axes x, y, z, dans l'espace à trois dimensions.

On peut montrer que l'espace-temps utilisé par l'aviateur du Chapitre I correspond à une orientation de l'axe des temps tangente à sa ligne d'Univers, tandis que pour l'espace-temps ordinaire l'axe des temps est tangent à la ligne d'Univers d'un observateur terrestre. La contraction de Fitzgerald et le changement dans la mesure du temps sont donnés exactement par les formules habituelles de la rotation d'un système d'axes rectangulaires [1].

[1] Appendice. Note 3.

Il n'est pas très utile de nous appesantir sur la présence de ce facteur mystérieux $\sqrt{-1}$ qui semble avoir la propriété de transformer le temps en espace. On peut tout juste le considérer comme un artifice analytique. Pour étudier la théorie de l'Univers à quatre dimensions plus en détail, il nous faut revenir au temps réel, et faire face aux difficultés que présente cette géométrie nouvelle.

Considérons un observateur particulier S et représentons le temps dont il se sert par les distances comptées parallèlement à OT (Fig. 3). Une des dimensions de son espace sera parallèle à OX, une autre perpendiculaire au plan de la figure et le lecteur se représentera la troisième le mieux qu'il pourra. Il nous suffira heureusement de considérer la seule dimension d'espace OX et d'étudier les phénomènes d'un univers linéaire ; en d'autres termes, nous nous bornerons à des mouvements de va-et-vient sur une droite de l'espace.

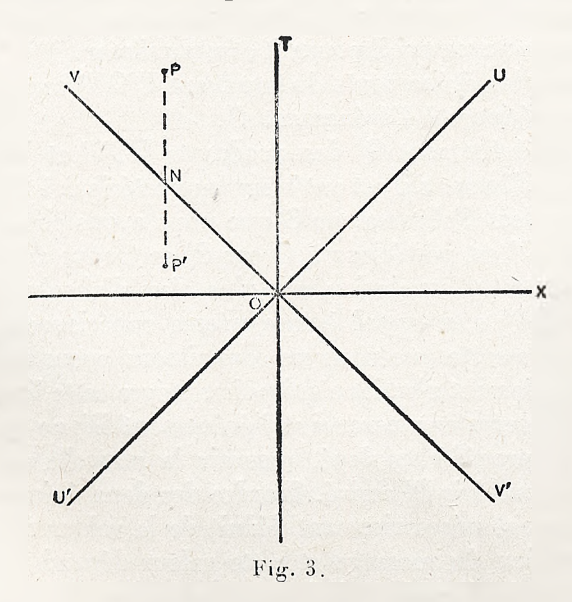


Fig. 3.

Les deux droites U'OU, V'OV à 45° des axes sont des lignes d'Univers de points qui avancent d'une unité horizontalement (dans l'espace) pour une unité verticalement (dans le temps) ; ces points ont donc une vitesse unité ; or nous avons pris la vitesse de la lumière pour vitesse unité ; U'OU, V'OV seront

donc les lignes d'Univers d'ébranlements lumineux se propageant dans des directions opposées de notre univers linéaire.

Tout événement P du quadrant UOV est sans aucun doute postérieur à l'événement O, quel que soit le moyen utilisé pour compter le temps. Une particule matérielle pourrait, en effet, aller de O en P, la vitesse nécessaire à ce déplacement étant inférieure à celle de la lumière ; aucun observateur sensé ne se risquerait à dire que la particule a terminé son voyage avant de l'avoir commencé. Il serait, en fait, possible pour un observateur décrivant NP de recevoir un signal lumineux ou un radiotélégramme lui annonçant l'événement O au moment précis où il atteindrait N, puisque ON est la ligne d'Univers d'un pareil message ; après le temps NP il aurait la perception directe de l'événement P. Avoir la certitude qu'un événement s'est accompli avant de percevoir directement un deuxième événement est une preuve évidente de leur ordre absolu dans la nature, qui convaincrait non seulement l'observateur envisagé mais tout autre observateur avec qui il pourrait communiquer.

De même les événements du quadrant U'OV' sont indubitablement antérieurs à l'événement O.

Pour un événement P' des quadrants UOV' et VOU' nous ne pouvons affirmer s'il est antérieur ou postérieur à O. D'après la manière dont l'observateur S que nous avons choisi compte son temps, P' est postérieur à O car P' se trouve au-dessus de OX ; mais cette conclusion n'a plus rien d'absolu. La ligne d'Univers OP' correspond à une vitesse supérieure à celle de la lumière de sorte que nous ne connaissons aucune particule, aucun ébranlement physique qui puisse suivre cette ligne d'Univers. Un observateur percevant l'événement P' ne peut, quel que soit le procédé employé, recevoir la nouvelle de l'événement O qu'une fois P' arrivé. L'ordre des deux événements est par conséquent nécessairement déduit de la valeur de la durée de propagation du message et cette valeur dépend essentiellement de la manière dont l'observateur compte son espace et son temps.

L'espace-temps se trouve donc divisé en trois zones par rapport à l'événement O ; U'OV' appartient sans aucun doute au passé ; UOV est le futur. UOV', VOU' ne sont d'une manière absolue ni le passé, ni le futur, mais simplement « ailleurs ».

Il est à remarquer que, puisque nous n'avons aucun moyen d'affirmer que deux points de l'espace sont « le même point », et puisque les événements O et P pourraient fort bien affecter la même particule matérielle, il n'y a aucune raison de dire que ces événements ont eu lieu en des endroits différents, bien que ce soit l'opinion de l'observateur S ; au contraire, les événements O et P' ne peuvent affecter la même particule et aucun observateur ne peut les considérer comme survenus au même endroit. L'intérêt principal de cette analyse est qu'elle nous montre que la liberté dont nous jouissons dans le choix de l'axe des temps n'est pas incompatible avec l'existence des régions de passé et de futur absolus.

Bien qu'il y ait un passé et un futur absolus, il y a entre eux une zone neutre et la simultanéité d'événements en différents endroits n'a aucune signification absolue. Pour l'observateur que nous avons choisi, tous les événements le long de OX sont simultanés ; pour un autre observateur, la ligne des événements simultanés avec O aurait une direction différente. La négation de la simultanéité absolue est le complément naturel de la négation du mouvement absolu. La dernière affirme notre impuissance à déterminer un même lieu à deux instants différents et la première à déterminer un même instant en deux lieux différents. Il est curieux de constater que la négation philosophique du mouvement absolu est une chose que l'on accepte facilement, tandis que celle de la simultanéité absolue semble à beaucoup révolutionnaire.

Cette division en passé et en futur (caractère spécial à l'ordre dans le temps et qui n'a pas d'équivalent dans l'ordre de l'espace) est liée étroitement à nos idées de causalité et de libre arbitre. On peut comparer un schéma du monde entièrement déterministe à une carte sur laquelle les événements passés et futurs sont des points marqués — aussi utiles à notre exploration du présent que les points de l'espace où nous ne sommes pas. Les événements ne se produisent pas : ils sont à leur place, et nous les rencontrons en suivant notre ligne d'Univers. L'acte de se produire, pour un événement, est une simple formalité signifiant que l'observateur est passé dans le futur absolu de l'événement en question, formalité qui par elle-même n'a pas grande importance. Nous pouvons savoir qu'il y aura une

éclipse en 1999 avec le même degré de certitude que nous connaissons à Algol un compagnon que nous n'avons jamais vu. Notre connaissance des choses *là où* nous ne sommes pas et celle des choses *quand* nous n'y sommes pas sont exactement de même nature — une déduction (parfois erronée) aidée par notre mémoire et basée sur des impressions que notre cerveau reçoit *en ce lieu* où nous sommes *maintenant*.

Donc, si les événements rentrent dans un schéma déterministe, il n'y a rien qui puisse empêcher quelqu'un d'être sûr que tel événement arrivera, avant même son arrivée ; un événement peut être la cause d'événements qui lui sont antérieurs. Ainsi l'éclipse de Soleil de Mai 1919 détermina certains de ses observateurs à s'embarquer en Mars. On peut objecter que ce n'est pas l'éclipse elle-même mais les calculs qui avaient prévu cette éclipse, qui furent la cause de cet embarquement ; je ne pense pas qu'une pareille distinction soit possible étant donné le caractère indirect de la connaissance que nous avons des événements en général, à part ceux qui se produisent au point précis de l'espace que nous occupons. Un observateur qui aurait pour mission de porter toute son attention sur notre monde, constaterait que certains événements paraissent la cause d'événements dans leur futur, et d'autres la cause d'événements dans leur passé — la vérité étant que tous ces événements sont liés par des lois déterminées, les événements « causes » n'étant en quelque sorte que des foyers particulièrement visibles d'où rayonnent les liens qui les unissent aux événements « effets ».

Le fait que nous avons reconnu l'existence d'un passé et d'un futur absolus semble lié à la possibilité d'événements qui n'obéissent pas à un schéma déterministe. Si, par exemple, l'événement O est un ultimatum et que ce soit un chef de l'Etat auquel il s'adresse qui décrive la ligne d'Univers NP, il est alors bien évident pour tous les observateurs que ce qui a conduit ce personnage à produire l'événement P, c'est sa connaissance de l'ultimatum. P doit alors se trouver dans le futur absolu de O et, comme nous l'avons vu, être contenu dans le quadrant UOV. Or cette déduction n'est permise que si l'événement P a pu être déterminé par l'événement O, et non par des causes antérieures à ces deux événements — si, en particulier, il pouvait se produire ou non en l'absence de O, tout en obéis-

sant parfaitement aux lois de la nature. La physique n'a pas à s'occuper de ces événements qui échappent au déterminisme ; la distinction du passé et du futur absolus ne l'intéresse donc pas directement. Il n'est pourtant pas dénué d'intérêt de montrer que le passé et le futur absolus qui nous sont fournis par la théorie de l'espace-temps à quatre dimensions, sont conformes à nos besoins courants, bien que ce soit là un fait que le physicien puisse le plus souvent ignorer.

Considérons maintenant tous les événements qui se trouvent à un intervalle de O égal à l'unité. L'intervalle s est donné par la formule :

$$s^2 = -(x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2 + (t_2-t_1)^2. \quad (1)$$

Nous avons changé le signe de s^2 car dans la plupart des cas

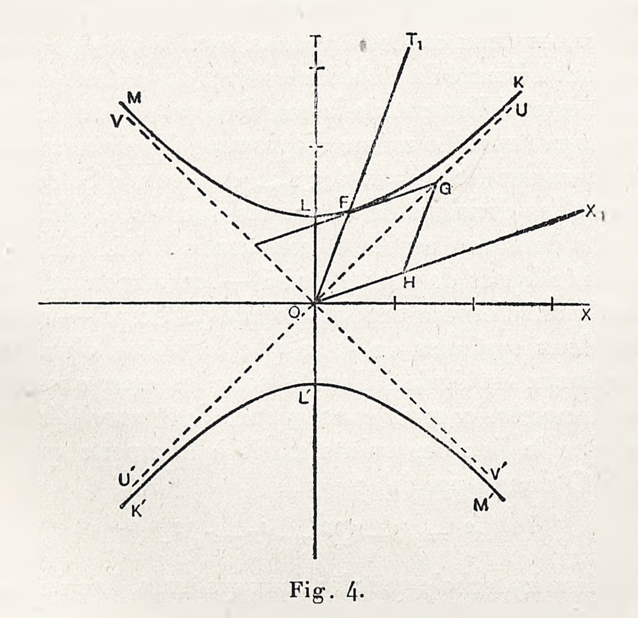


Fig. 4.

(sinon toujours), le s^2 tel que nous l'avions défini, aurait été négatif. Dans l'espace euclidien des points distants de O de l'intervalle unité auraient été distribués sur une circonférence. Mais à cause du changement de géométrie dû à la modification

du signe de $(t_2-t_1)^2$, ils se trouvent maintenant sur une hyperbole équilatère dont les deux branches sont KLM et K'L'M'. Comme l'intervalle est une grandeur absolue, tous les observateurs, quels qu'ils soient, conviendront d'un commun accord que les points de cette hyperbole sont à un intervalle unité de O.

Effectuons maintenant la construction suivante. Traçons une droite OFT_1 qui coupe l'hyperbole en F ; menons en ce point la tangente FG qui rencontre la ligne d'Univers de la lumière U'OU en G. Complétons le parallélogramme OFGH et prolongeons OH suivant OX_1. Nous pouvons maintenant affirmer qu'un observateur S, qui choisit OT_1 pour axe des temps, regardera nécessairement OX_1 comme sa direction d'espace et prendra OF et OH pour unités de temps et d'espace.

Les deux observateurs font leurs divisions de l'espace et du temps d'une manière différente comme le montrent les Fig. 5 et 6 ; dans les deux cas les divisions sur les axes de temps ou d'espace sont à l'unité de distance les unes des autres, cette unité dépendant essentiellement de la manière propre de compter de chaque observateur. Le même diagramme des événements dans l'Univers sera applicable aux deux observateurs ; S_1 remplacera simplement les divisions de S par les siennes et localisera les événements dans son espace et son temps à lui. On voit aisément que les lignes de vitesse unité — correspondant au parcours de l'unité d'espace pendant l'unité de temps — coïncident pour les deux systèmes de sorte que la vitesse d'un ébranlement lumineux est égale à l'unité pour les deux observateurs. On peut montrer, comme conséquence des propriétés de l'hyperbole, que le lieu des points situés à n'importe quel intervalle s de O donné par (1) :

$$s^2 = (t-t_0)^2 - (x-x_0)^2,$$

est une même hyperbole pour les deux systèmes. Les deux observateurs sont d'accord dans leurs mesures d'intervalles bien qu'ils ne le soient plus pour les longueurs, durées et vitesses, sauf celle de la lumière. Cette transformation un peu compliquée est mathématiquement équivalente à un simple rotation d'axes quand on fait usage du temps imaginaire.

On ne doit pas supposer que la différence qui existe entre la

division en carrés de l'observateur S et la division en losanges de l'observateur S_1, correspond à quelque distinction ayant son origine dans la nature. On pourrait dire que S_1 transporte l'espace-temps non déformé de la Fig. 5 à la Fig. 6 et là, le

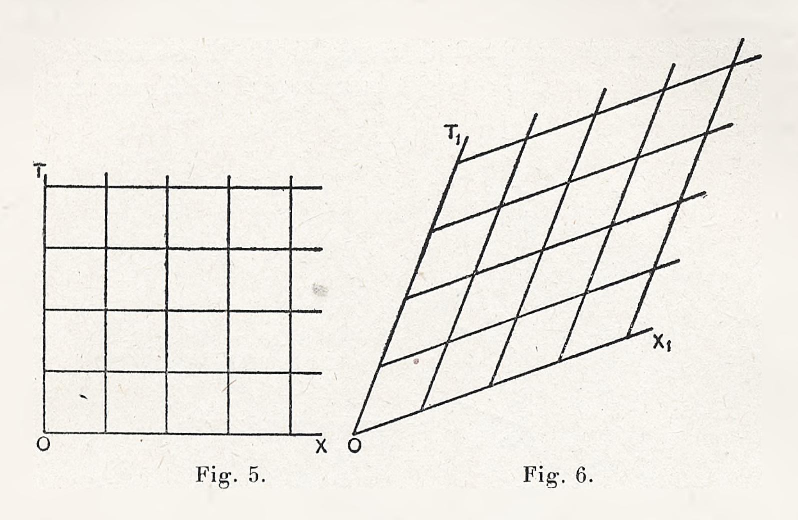


Fig. 5. Fig. 6.

déforme de façon que les losanges que nous avons tracés deviennent des carrés ; nous pourrions tout aussi bien partir de cet espace-temps déformé, partagé par S_1 en carrés ; les divisions de S seraient alors représentées par des losanges. On ne peut pas dire que l'espace-temps de chacun des observateurs soit déformé d'un manière absolue ,mais qu'ils sont déformés l'un par rapport à l'autre. C'est la relation d'*ordre* qui est d'une nature intrinsèque et qui est la même à la fois pour les carrés et pour les losanges ; quant à la *forme,* l'observateur l'introduit dans la nature quand il fait choix de ses divisions.

Nous pouvons maintenant retrouver la contraction de Fitzgerald. Considérons une règle de longueur égale à l'unité, au repos pour l'observateur S ; les deux extrémités de la règle sont au repos dans son espace et restent, par conséquent, constamment sur les mêmes divisions d'espace ; leurs lignes d'Univers PP', QQ' (Fig. 7) sont donc parallèles à l'axe des temps. Quant à la règle elle-même, c'est l'objet à quatre dimensions dont une section est représentée par P'PQQ'. Superposons à la même figure les divisions de l'espace-temps de S_1 (lignes pointillées).

Prenons une section à un instant quelconque ; la position de la règle, à cet instant, est P_1Q_1, c'est-à-dire la section de P'PQQ' par la ligne de temps constant de S_1. On voit sur la figure que P_1Q_1 est un peu plus long que PQ, mais un peu plus court qu'une division d'espace de S_1 ; l'observateur S_1 juge donc que la règle a une longueur d'un peu moins d'une unité ; elle s'est contractée par suite de son mouvement relatif par rapport à l'observateur.

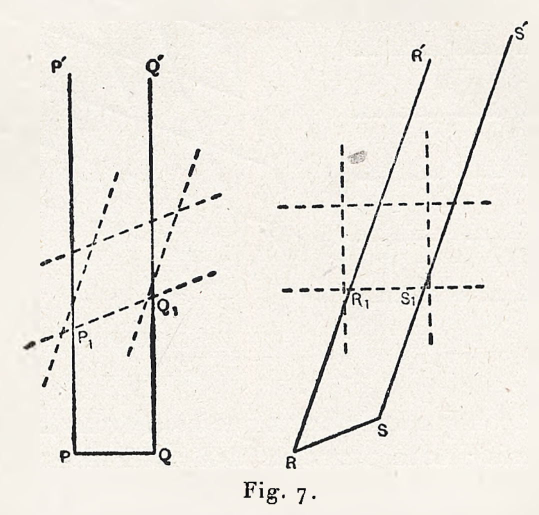


Fig. 7.

De même RR' SS' est l'image d'une règle au repos pour S_1. Couvrant ce diagramme des divisions d'espace-temps de S, la règle occupe R_1S_1 à un instant déterminé pour S ; ce segment est plus court qu'une division d'espace de S ; l'observateur S juge que la règle a subi une contraction du fait de son mouvement par rapport à lui.

Nous pouvons également illustrer de cette manière le problème de la durée du cigare (Chap. I) ; chaque observateur croit que c'est le cigare de l'autre qui a duré le plus longtemps. LM (Fig. 8) représente la durée du cigare de S (2 unités) ; pour S_1 cette durée est d'un peu plus de deux divisions de temps. De plus le cigare n'a plus sa ligne d'Univers parallèle à l'axe du temps de S_1 : il a bougé. De même L'N' est la durée du cigare de S_1 (2 unités de temps pour lui) ; cette durée est un peu supérieure à deux unités pour S (à noter que dans

absurdité ». Mais je crois que cette voix a dû se faire entendre plus d'une fois dans le cours de l'histoire de la physique. Quelle absurdité de dire que cette table solide sur laquelle j'écris n'est qu'un ensemble d'électrons doués de vitesses prodigieuses à travers des espaces vides aussi vastes par rapport aux électrons que, par rapport aux planètes du système solaire, les distances qui les séparent ! Quelle absurdité de dire que l'air léger presse mon corps à raison de plus de un kilogramme par centimètre carré ! Quelle absurdité de penser que cet amas d'étoiles que j'observe *maintenant* dans mon télescope n'est que le reflet d'un passé de plus de 50.000 ans ! Non, n'écoutons pas cette voix, elle n'a plus aucun crédit !

Dire que le temps est une quatrième dimension, peut susciter des difficultés inutiles qu'une définition plus précise peut fort bien éviter. C'est dans le monde extérieur que les quatre dimensions se trouvent réunies — et non dans les rapports de ce monde extérieur avec un observateur qui fait une étude directe de l'espace et du temps. C'est précisément dans ces rapports avec l'individu que l'ordre dans l'espace et l'ordre dans le temps se présentent différemment. L'individu n'est autre qu'un objet à quatre dimensions de forme très allongée ; en langage ordinaire nous disons qu'il a une extension considérable dans le temps et négligeable dans l'espace. Pratiquement, on peut le représenter par une ligne, sa ligne d'Univers. Quand le monde est rapporté à cet individu, sa propre dissymétrie intervient dans les rapports ; et la succession des événements prise parallèlement à sa ligne d'Univers, c'est-à-dire parallèlement à lui-même, se montre comme profondément différente de tous les autres ordres d'événements.

Je crois que l'exposé le plus connu que l'on a fait de cette question de la quatrième dimension est celle de E. Abbott dans son livre populaire : « *Flatland* ». Il peut être intéressant de voir jusqu'à quel point l'Univers à quatre dimensions de l'espace-temps est conforme à ses prévisions. Il insiste sur ces trois points :

1° Quand un corps à quatre dimensions se meut, sa section par le monde à trois dimensions peut varier : un corps rigide peut donc changer de forme et de dimensions.

2° Un corps pourrait pénétrer dans un espace parfaitement

les deux diagrammes L', M', N' représentent respectivement les mêmes points que L, M, N).

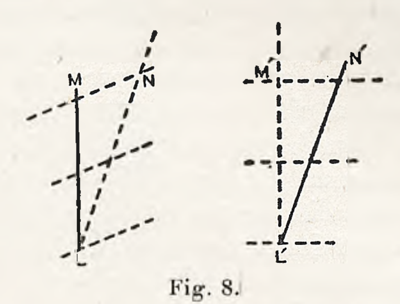


Fig. 8.

Si dans la Fig. 4 nous avions pris OT_1 presque confondu avec OU, nos losanges auraient été très allongés et les divisions unités OF, OH très grandes. Ce genre de partage serait fait par un observateur dont la ligne d'Univers serait OT_1, et qui aurait par conséquent une vitesse voisine de celle de la lumière. A la limite, quand la vitesse atteint celle de la lumière, l'unité d'espace et l'unité de temps deviennent simultanément infinies, de sorte que pour un observateur ayant la vitesse de la lumière, toute succession d'événements demandant pour se produire un temps fini pour S, se produit dans un temps nul pour S_1 et les dimensions d'un objet déterminé pour S sont nulles pour S_1. Mais tout ceci ne s'applique qu'aux deux dimensions x et t ; les divisions d'espace suivant les axes perpendiculaires à OX, ne sont pas affectées par ce mouvement le long de l'axe des x. Pour un observateur se mouvant avec la vitesse de la lumière tous les objets ordinaires deviennent donc à deux dimensions ; leurs dimensions latérales sont conservées mais ils deviennent infiniment minces dans le sens du mouvement. On interprète en général ce fait que des événements se produisent dans un temps nul, en disant que l'inertie de toute particule se mouvant avec la vitesse de la lumière devient infinie de sorte que le cours des phénomènes moléculaires relatifs à notre observateur, doit s'arrêter. En un « clin d'œil » pour S_1 bien des événements peuvent survenir dans l'Univers de S !

Si féconde que soit la théorie de l'Univers à quatre dimensions, on ne peut étouffer en soi une voix qui murmure : « Tu sais bien, au fond, que cette quatrième dimension n'est qu'une

clos en suivant la direction de la quatrième dimension ; c'est là une généralisation de ce fait que nous pouvons faire tomber la pointe de notre crayon en tout point intérieur à un carré, sans couper ses côtés.

3° On pourrait voir l'intérieur d'un corps solide de même que nous pouvons voir l'intérieur d'un carré en plaçant notre œil extérieurement à son plan.

La contraction de Fitzgerald n'est autre que la manifestation du premier phénomène.

Si l'on identifie la masse avec la quantité de matière, le deuxième phénomène n'a pas lieu ; on pourrait concevoir aisément son occurence s'il ne s'était pourvu contre elle grâce à une loi de la nature, celle de la conservation de la masse. Logiquement il pourrait donc arriver, mais il n'arrive pas.

Le troisième phénomène n'a pas lieu pour deux raisons. Un corps de la nature a une extension dans le temps aussi bien que dans l'espace ; il a par suite quatre dimensions, mais pour que l'analogie soit conservée, il faudrait que l'objet ait une dimension de moins que l'Univers, exactement comme le carré que nous observions d'un point de la troisième dimension. Si, tout d'un coup, le solide venait à sortir de l'existence, de manière à présenter une section plane par rapport au temps, nous ne pourrions encore voir son intérieur, car la lumière est contrainte de suivre certaines lignes d'Univers bien définies telles que U'OV, V'OU de la Fig. 3, tandis que dans l'espace à trois dimensions, elle peut suivre n'importe quelle ligne droite. On pourrait remédier à cet inconvénient en interposant une sorte de milieu dispersif de sorte que la lumière d'une longueur d'onde déterminée pourrait suivre une ligne d'Univers quelconque dans l'espace-temps ; regardant alors un solide qui viendrait à sortir tout d'un coup de l'existence nous pourrions percevoir au même moment les impressions lumineuses de toutes ses particules intérieures (en les supposant lumineuses par elles-mêmes) ; c'est alors que nous verrions réellement l'intérieur de ce solide.

Comment nos pauvres yeux pourraient-ils débrouiller ces impressions déconcertantes ? C'est là une toute autre question.

L'intervalle est, pour nous, une grandeur si importante que nous devons insister sur sa mesure. Supposons que nous

ayons une règle AB divisée en kilomètres, par exemple, et qu'à chacune de ses divisions soit placée une horloge marquant également des kilomètres (on doit se rappeler que le temps peut être mesuré indifféremment en secondes ou en kilomètres, c'est-à-dire en temps mis par la lumière pour parcourir un kilomètre). Quand les horloges sont convenablement réglées et qu'on les regarde du point A, la somme de leur indication et de la division correspondante de la règle est la même pour toutes puisque la graduation de la règle donne la correction à faire subir au temps du fait de la durée de propagation de la lumière des différentes horloges au point A, cette propagation se faisant avec la vitesse unité. C'est ce que montre la Fig. 9 où les indi-

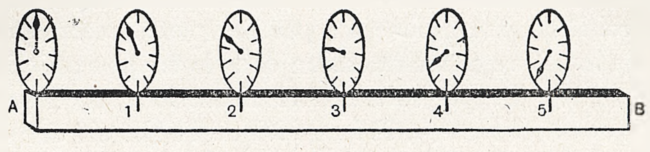


Fig. 9.

cations des horloges sont celles que l'on observe du point A. Alignons maintenant notre règle sur les deux événements ; notons l'heure et la graduation de la règle (t_1, x_1) correspondant au premier événement, et les lectures (t_2, x_2) correspondant au deuxième. D'après la formule donnée prédédemment :

$$s^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2.$$

Supposons que nous ayons pris un étalon de repos différent et que la règle soit animée d'un mouvement uniforme dans la direction AB. Les divisions iraient à la rencontre du deuxième événement et $(x_2 - x_1)$ serait alors plus petit que précédemment. Cette variation est compensée par celle de $(t_2 - t_1)$. A avance maintenant à la rencontre de la lumière provenant des horloges disposées le long de la règle ; cette lumière arrive en quelque sorte trop vite et dans le réglage initial décrit plus haut, les horloges doivent être légèrement retardées. L' « heure » de l'événement est donc plus petite. Il y a encore d'autres corrections, également petites, provenant de la contraction de Fitzge-

rald, etc. ; finalement, quel que soit le mouvement uniforme donné à la règle, la valeur de *s* est toujours la même.

Dans la mécanique classique, on nous apprend que les vitesses peuvent s'ajouter par voie d'addition. Si la vitesse de B par rapport à A (observée par A ou par B) est de 100 km. par sec. et si la vitesse de C par rapport à B est aussi de 100 km. par sec. et dans la même direction, la vitesse de C par rapport à A est de 200 km. par sec. Eh bien, non ! Ce n'est pas tout à fait exact ; le résultat rigoureux est de 199,999978 km./sec. Cette différence n'est pas difficile à expliquer ; elle provient de ce que les deux vitesses et leur résultante ne sont pas comptées avec les mêmes divisions d'espace et de temps. Quand B mesure la vitesse relative de C par rapport à lui, il le fait avec son espace et son temps à lui, et il doit réduire sa mesure aux unités d'espace et de temps de A avant de l'ajouter à une vitesse mesurée par A.

Il n'est pas sans intérêt de rappeler que dès 1851 on connut un cas où se trouvait en défaut la règle ordinaire de la composition des vitesses, bien que l'échec de cette règle n'eût pas été reconnu à cette époque. Supposons qu'un faisceau lumineux soit envoyé dans un courant d'eau et que sa direction ait le sens du courant ; soient w la vitesse de la lumière se propageant dans l'eau et u celle du courant ; nous pourrions nous attendre à ce que la vitesse de la lumière pour un observateur fixe soit $u+w$. L'expérience fut faite par Fizeau et elle montra qu'en définitive cette vitesse était inférieure à $u+w$. Or la loi de composition des vitesses que donne la théorie de la relativité est parfaitement d'accord avec les résultats trouvés par Fizeau.

Si nous poursuivons l'enchaînement en introduisant D dont la vitesse par rapport à C, mesurée par C, est de 100 km. par sec., et ainsi de suite, *ad infinitum*, nous n'obtiendrons jamais une vitesse infinie par rapport à A, mais une vitesse tendant vers cette vitesse limite de la lumière, 300.000 km./sec. Cette vitesse a la propriété remarquable d'être une vitesse absolue tandis que toute autre n'est que relative. Vient-on à parler d'une vitesse de 100 km./sec. ou de 100.000 km./sec., cette question doit immédiatement se poser à nous : vitesse par rapport à quoi ? Si l'on parle, au contraire, d'une vitesse de

300.000 km./sec., il est inutile de se poser cette question car la réponse serait : par rapport à n'importe quel fragment de matière. Une particule β, émise par du radium, peut se mouvoir avec une vitesse de plus de 200.000 km./sec. ; mais, pour un observateur qui lui serait fixé, la vitesse de la lumière serait encore de 300.000 km./sec. Ceci nous rappelle le symbole transfini *Aleph* du mathématicien, duquel vous pouvez retrancher n'importe quel nombre et qui reste encore identique à lui-même.

La vitesse de la lumière joue un rôle capital dans la théorie de la relativité et il est important de bien comprendre quelle est la propriété qui la rend fondamentale. Le fait que la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs, est une conséquence plutôt qu'une cause de son caractère exceptionnel. Quand nous l'avons introduite pour la première fois dans le but de créer une coordination des unités de longueur et de temps, c'était par pure convention et en vue de simplifier les expressions algébriques. Par la suite, nous nous sommes servis plus d'une fois de ce fait que l'on ne connaît rien en physique qui puisse se propager avec une vitesse supérieure, de sorte que, pratiquement, nous déterminons la simultanéité à l'aide de signaux transmis avec cette vitesse. Si jamais l'on découvrait quelque nouveau rayon plus rapide, on pourrait peut-être l'utiliser pour remplacer les signaux lumineux et la vitesse de la lumière dans la partie présente de la théorie, en modifiant convenablement la manière de mesurer le temps, afin de le faire correspondre à la nouvelle vitesse choisie ; du reste, on serait ainsi conduit à une complication plus grande dans les formules car la contraction de Fitzgerald, qui intéresse les mesures d'espace, dépend essentiellement de la vitesse de la lumière. L'importance capitale de cette vitesse de la lumière est qu'il n'existe aucun corps *matériel* dont la vitesse puisse la dépasser. Ceci nous donne un procédé général pour distinguer physiquement les trajectoires dans le temps de celles dans l'espace pur, c'est-à-dire celles qui peuvent être suivies par la matière de celles qui ne le peuvent pas. La structure matérielle de l'Univers à quatre dimensions est fibreuse et les fibres suivent les lignes d'Univers dans le temps ; toutes entrelacées, elles forment la chaîne d'un tissu non tramé. Par suite, si la découv-

verte de quelque nouveau rayon nous amenait à modifier notre manière de compter le temps et de mesurer l'espace, il serait encore nécessaire dans l'étude des systèmes matériels de conserver, en créant de nouveaux noms s'il le fallait, cette distinction actuelle absolue d'intervalle « dans le temps » et d'intervalle « dans l'espace pur ».

On peut se demander si rien ne peut exister qui ait une vitesse supérieure à celle de la lumière. Sans aucun doute, la matière ne peut répondre à la question ; mais rien n'empêcherait qu'il existât dans la nature quelque chose de plus rapide. « Mr. Speaker », dit Sir Bayle Roche, « n'étant pas oiseau, je ne puis être en deux lieux différents au même moment ». Toute entité douée d'une vitesse supérieure à celle de la lumière aurait la propriété qu'assigne à son oiseau Sir Bayle Roche. C'est à peine s'il est plus contradictoire de dire qu'un objet peut être à deux places différentes au même instant que de se trouver à la même place à deux instants différents. Les difficultés de la théorie des quanta nous portent parfois à penser que cette possibilité ne doit pas être rejetée ; mais, dans l'ensemble, l'expérience semble se prononcer contre l'existence de ce quelque chose qui puisse se mouvoir avec une vitesse supérieure à celle de la lumière.

La théorie relativiste et le principe de relativité sont complètement indépendants de toute hypothèse sur la constitution de la matière ou de le lumière. Jusqu'ici, le seul rapport que nous ayons eu avec la théorie électrique, fut au sujet de l'explication de la contraction de Fitzgerald donnée par Larmor et Lorentz, mais la discussion de la théorie de l'Univers à quatre dimensions nous a permis de trouver une explication plus générale du changement de longueur. La théorie électrique de la matière a subi un choc qui l'a réellement affaiblie le jour où l'on a trouvé que de nombreux effets expérimentaux attribués primitivement à des propriétés particulières des forces électriques, n'étaient en réalité que des conséquences très générales de la relativité de nos connaissances basées sur l'observation.

Si la théorie électrique de la matière n'est plus aussi évidente qu'elle le parut à un moment donné, il n'en reste pas moins vrai qu'on peut l'employer sans crainte sérieuse. Admettre deux entités, matière et charge électrique, alors qu'une seule suffi-

rait, est une hypothèse arbitraire injustifiable dans l'état actuel de la science. Le grand pas que la théorie électrique a fait faire à cette question est l'explication précise de la propriété de l'inertie. J.-J. Thomson a montré théoriquement que tout conducteur chargé qui doit être mis en mouvement ou arrêté, nécessite un effort additionnel du fait même de l'existence de sa charge électrique. Le conducteur mobile doit entraîner avec lui son champ électrique, et une force est nécessaire pour mettre ce champ en mouvement. C'est cette propriété que l'on appelle l'inertie, et sa mesure est la *masse*. Si, conservant une charge constante, on diminue les dimensions du conducteur, cette inertie augmente. On a prouvé expérimentalement que les plus petites particules séparables constituant la matière ont des dimensions extraordinairement petites et portent des charges ; ceci nous suggère l'idée que l'existence de ces charges pourrait bien être la cause de l'inertie totale de la matière. L'explication est suffisante et il ne semble y avoir aucune raison de douter que toute l'inertie soit de nature électrique.

Quand les calculs sont appliqués à des charges se mouvant avec une vitesse considérable, ils montrent que l'inertie électrique n'est pas rigoureusement constante, mais dépend de cette vitesse ; dans tous les cas la variation est définie par cette loi que l'inertie est simplement proportionnelle à l'énergie totale du champ électromagnétique. Nous pouvons, si nous voulons, dire que la masse d'une particule chargée au repos appartient à son énergie électrostatique ; quand la charge est mise en mouvement, l'énergie cinétique vient s'ajouter et cette énergie cinétique a également une masse. Il s'ensuit que masse (inertie) et énergie ne sont qu'une seule et même chose ou du moins ne sont que deux aspects d'une même chose. On doit se rappeler que, d'après cette théorie, la plus grande partie de la masse de la matière est due à une énergie cachée que l'on n'a pas encore pu mettre en évidence.

La question de savoir si l'énergie électrique non liée à des charges électriques peut avoir une masse, trouve une réponse affirmative dans le cas de la lumière. La lumière a une masse. Sans doute l'énergie de gravitation a-t-elle également une masse ; sinon, il y aurait création de masse chaque fois, et c'est là un phénomène des plus fréquents, que de l'énergie de gra-

vitation est transformée en énergie cinétique. La masse de la totalité (négative) de l'énergie gravitationnelle de la Terre est de l'ordre de *moins* un billion de tonnes.

L'accroissement théorique de la masse d'un électron avec la vitesse a été confirmé expérimentalement, l'accord avec le calcul étant parfait si l'on suppose l'électron soumis à la contraction de Fitzgerald qui provient de son mouvement. On a cru que cet accord démontrait que l'électron ne peut avoir une inertie autre que celle due au champ électromagnétique qu'il entraîne avec lui ; mais cette conclusion (bien qu'assez probable) n'est pas irréprochable ; en effet, ce résultat obtenu par un calcul spécial à l'inertie électrique, n'est qu'un cas particulier de ce que prévoit la théorie de la relativité pour n'importe quel genre d'inertie ; c'est ce que nous montrerons au Chapitre IX. Le facteur donnant l'accroissement de la masse avec la vitesse n'est autre que celui qui affecte la longueur et le temps. Ainsi, une règle qui se meut avec une vitesse telle que sa longueur se trouve diminuée de moitié, a une masse qui sera doublée. Sa densité sera quadruplée puisque la règle devient à la fois plus lourde et moins volumineuse.

Nous avons cru bon de rappeler ces quelques résultats de la théorie électrique de la matière et de la masse car, bien qu'elle ne soit pas nécessaire à la théorie de la relativité, elle est si universellement acceptée en physique, que le relativiste n'a pour ainsi dire pas le droit de l'ignorer. Plus tard, nous établirons d'une manière plus générale l'identification de la masse avec l'énergie et la variation de la masse avec la vitesse ; mais, comme la mesure expérimentale de l'inertie comporte l'étude d'un corps en mouvement non uniforme, il n'est pas possible de faire une discussion complète de la théorie de la masse, tant que nous n'aurons pas développé la théorie plus générale de la relativité appliquée au mouvement non uniforme.

CHAPITRE IV

LES CHAMPS DE FORCE.

Nam per aquas quæcumque cadunt atque aera deorsum
Haec, pro ponderibus, casus celerare necesse est
Propterea quia corpus aquae naturaque tenuis
Aeris haud possunt aeque rem quamque morari :
Sed citius cedunt gravioribus exsuperata ;
At contra nulli, de nulla parte, neque ullo
Tempore, inane potest vacuum subsistere rei,
Quin sua quod natura petit concedere pergat.
Omnia quapropter debent per inane quietum
Aeque ponderibus non aequis conceta ferri.

LUCRÈCE (*De Natura Rerum,* Livre II).

Notre conception première de la force est liée à la sensation musculaire que nous éprouvons quand nous exerçons un effort pour mettre la matière en mouvement ou pour l'arrêter. Des effets analogues sur le mouvement de la matière peuvent résulter d'actions où aucun être vivant n'intervient, et l'on est conduit à regarder ces effets comme dûs également à des forces. On sait que la mesure scientifique d'une force est exprimée par la quantité de mouvement qu'elle communique à un corps en un temps donné. La transmission d'une force par contact matériel n'a rien de très abstrait ; la physique moderne montre

(1) Il est vrai que, dans l'eau ou dans l'air, les corps accélèrent leur chute à proportion de leur pesanteur, parce que les ondes et le fluide léger de l'air n'opposent pas à tous la même résistance, mais cèdent plus aisément aux plus lourds. Il n'en est pas de même du vide ; jamais et en aucun endroit il ne résiste aux corps ; il leur ouvre également à tous un passage. Ainsi les atomes, malgré l'inégalité de leurs masses, doivent se mouvoir avec une égale vitesse dans le vide, théâtre passif de leur activité.

que la quantité de mouvement se communique d'un corps à un autre par un processus de bombardement moléculaire. On peut rendre visible ce mécanisme et « voir » les molécules transmettre le mouvement par quantités élémentaires à travers la surface limite du corps sur lequel on agit. La force n'est en rien une action mystérieuse ; elle n'est en quelque sorte qu'une représentation commode de ces échanges de quantité de mouvement que nous pouvons toujours suivre de manière plus continue si nous voulons nous en donner la peine. Il est vrai qu'on n'a fait que reculer la difficulté, car le mode exact d'échange de la quantité de mouvement dans un choc moléculaire reste encore inexpliqué ; pourtant, si imparfaite soit-elle, cette analyse nous donne tout de même une idée claire de la transmission du mouvement dans le cas des forces que l'on rencontre couramment.

Mais, même dans la mécanique élémentaire, il y a une force naturelle extrêmement importante, qui paraît ne pas se comporter de cette manière. La force de gravitation ne peut en effet se résoudre en une succession de chocs moléculaires. Un corps massif, tel que la Terre, semble entouré par le champ d'une force latente, tout prêt, si un autre corps y pénètre, à entrer en activité et à transmettre le mouvement. L'opinion courante que l'on se fait de cette puissance d'action, c'est qu'elle existe en permanence dans l'espace qui entoure la Terre, même s'il ne s'y trouve aucun corps qui puisse servir à la mettre en évidence ; on soupçonne vaguement qu'elle doit être due à quelque déformation ou à quelqu'autre propriété d'un milieu qu'on n'a jamais décelé.

La gravitation est connue depuis des milliers d'années ; depuis plus de deux cents ans ses lois ont été formulées avec une précision suffisante pour presque tous les problèmes que l'on pouvait se poser, et pourtant l'on ne peut pas dire qu'on ait fait grand progrès dans l'explication du mécanisme par lequel elle agit. On prétend que plus de deux cents théories de la gravitation ont été proposées, mais les plus plausibles d'entre elles ont toutes ce défaut qu'elles n'aboutissent à rien et qu'elles ne permettent aucune vérification expérimentale. Beaucoup d'entre elles seraient aujourd'hui rejetées comme trop matérialistes à notre idée — théories remplissant l'espace de mécanismes compliqués et que l'on prisait étrangement au XIXe siècle. Bien peu

survivraient à cette découverte récente que la gravitation n'agit pas seulement sur la matière mais également sur les ondulations de la lumière.

La nature de la gravitation a paru à tous des plus mystérieuses, et cependant c'est un fait remarquable qu'il soit possible, dans une région limitée de l'espace, de créer un champ de force artificiel absolument semblable à un champ de gravitation naturel, à tel point qu'on n'ait jamais pu les différencier malgré toute la précision des expériences faites jusqu'ici. Ceux qui cherchent à expliquer la gravitation, se proposent naturellement comme but de trouver un modèle qui reproduise ses effets ; mais aucun, jusqu'à Einstein, ne semble avoir pensé que l'on pouvait rencontrer le fil conducteur dans ces champs artificiels, si familiers qu'ils aient été.

Quand un ascenseur commence à s'élever, les personnes qui l'occupent perçoivent une sensation particulière qui est en réalité identique à celle d'un accroissement de leur poids. Cette impression disparaît dès que le mouvement devient uniforme ; elle est donc liée uniquement au changement de mouvement de l'ascenseur, c'est-à-dire à son accélération. Cet accroissement de poids n'est pas décelé que par nos sensations car toutes les expériences physiques que l'on peut faire le mettent également en évidence. La machine d'Atwood, souvent utilisée dans les laboratoires pour déterminer la valeur de l'accélération de la pesanteur, nous donnerait si nous la transportions à l'intérieur de l'ascenseur pendant le mouvement accéléré, une valeur plus grande. Un peson accuserait également des poids plus forts. Les projectiles auraient un mouvement conforme aux lois habituelles mais avec une valeur plus grande de l'accélération de la pesanteur. En résumé, l'accélération du mouvement d'un ascenseur en montée, aurait des effets mécaniques exactement semblables à ceux d'un champ de gravitation additionnel superposé au champ normal.

Peut-être l'équivalence est-elle plus marquée et se voit-elle mieux quand le champ artificiel créé neutralise exactement le champ de gravitation. C'est ainsi que Jules Verne dans son roman *Autour de la Lune,* raconte l'histoire de trois hommes enfermés dans un projectile lancé dans l'espace par un canon monstre. L'auteur s'étend sur les faits amusants qui leur arri-

vent quand, parvenus au point neutre — c'est-à-dire au point où l'attraction de la Terre et celle de la Lune se contrebalancent rigoureusement — leur poids disparaît entièrement. Mais en réalité c'est à partir de l'instant où ils auraient quitté notre atmosphère qu'ils auraient perdu complètement toute sensation de leur poids, et ils ne l'auraient retrouvée à aucun moment de leur voyage autour de la Lune. Le projectile obéissait complètement à l'action de la gravitation, et il en était de même de tout ce qu'il contenait. Quand un des voyageurs lâchait une assiette, celle-ci ne pouvait « tomber » plus vite qu'elle ne le faisait déjà ; elle restait donc en équilibre par rapport au projectile.

Nous verrons que cette sensation de poids, nous ne l'éprouvons pas quand nous sommes libres et que nous obéissons parfaitement aux ordres de la pesanteur, mais seulement lorsqu'on oppose quelque obstacle à notre chute. C'est essentiellement le sol ou notre chaise qui cause la sensation de poids en empêchant notre chute. Littéralement il paraît vrai de dire que ce n'est pas la force de gravitation de la Terre que nous sentons, mais bien le bombardement des semelles de nos chaussures par les molécules du sol ; les impulsions qui en résultent montent en nous et se répandent dans tout notre corps. C'est là un point de quelque importance car l'idée habituelle qui fait de la gravitation quelque chose dont nous pouvons avoir une sensation directe nous prédispose tout naturellement à des considérations matérialistes sur sa nature.

Un autre exemple de champ de force artificiel nous est fourni par la force centrifuge due à la rotation de la Terre. Dans la plupart des recueils de constantes physiques se trouve une table des valeurs de « g », accélération de la pesanteur, aux diverses latitudes. Les nombres donnés ne sont pas relatifs à la gravitation seule ; ils représentent les valeurs de la résultante de la gravitation et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre. Ces deux composantes sont tellement semblables dans leurs effets que les physiciens, pour leurs besoins courants, n'ont pas jugé utile de les distinguer et de les séparer.

Des champs artificiels semblables se trouvent créés par les changements de direction ou de vitesse d'un aéroplane, et l'une des difficultés de la navigation aérienne est précisément cette

impossibilité de les distinguer du champ de gravitation véritable avec lequel ils sont combinés. La pratique montre, du reste, que l'aviateur, pour piloter, n'a guère besoin d'être convaincu du caractère relatif de la force.

Pour nous faire une idée sur l'origine de ces champs artificiels, il nous faut revenir à l'Univers à quatre dimensions de l'espace-temps. L'observateur décrit une certaine ligne d'Univers et sa trajectoire n'est pas nécessairement une ligne droite. Rappelons-nous à ce propos que la droite de l'Univers à quatre dimensions a une signification un peu plus étendue que la droite de l'espace ordinaire ; elle implique en plus une vitesse uniforme puisque c'est la vitesse qui détermine l'inclinaison de la ligne d'Univers par rapport à l'axe des temps.

Un observateur situé dans un ascenseur accéléré parcourt de bas en haut une certaine ligne droite, à raison, par exemple, de 1 mètre dans la première seconde, 4 dans les 2 premières secondes, 9 dans les 3 premières, et ainsi de suite. Si nous portons ces nombres respectivement comme valeurs de x et de t sur un diagramme, nous obtenons comme ligne d'Univers une certaine courbe. Puis la vitesse de l'ascenseur devient uniforme et la ligne du diagramme devient alors une droite. Tant que la ligne d'Univers présente une courbure (mouvement accéléré) on perçoit un champ de force qui disparaît dès que la ligne devient droite (mouvement uniforme).

Autre exemple. Un observateur sur la Terre, du fait de la rotation de celle-ci, décrit en un jour une circonférence. Si l'on suppose sa progression dans le temps régulière, il a pour ligne d'Univers une hélice. S'il est au pôle nord sa ligne d'Univers sera droite et il ne percevra aucune force centrifuge.

Le champ de force artificiel est donc manifestement lié à la courbure de la ligne d'Univers et nous pouvons énoncer la loi suivante :

En tout point de la ligne d'Univers d'un observateur où la courbure est différente de zéro, cet observateur peut percevoir un champ de force artificiel.

Ce champ de force n'est pas seulement un objet de sensation pour l'observateur ; il se révèle aussi dans les mesures physiques. Il est du reste sous-entendu qu'on n'a pas dû, par ailleurs, avoir à supposer une courbure à la ligne d'Univers. Natu-

rellement, si l'observateur de l'ascenseur sait que ses mesures sont modifiées par sa propre accélération et s'il leur fait les corrections convenables, il supprime par là-même la force artificielle ; cette force n'existe que si notre observateur ignore son accélération, ou du moins raisonne comme s'il l'ignorait.

On dit souvent que la force centrifuge est une force « fictive ». Du point de vue d'un observateur qui ne tourne pas avec la Terre, il n'y a pas de force centrifuge ; elle n'existe que pour l'observateur terrestre trop paresseux pour tenir compte d'une autre manière de la rotation de notre globe. On pense couramment qu'elle peut, grâce à cette « non-réalité », être aisément différenciée d'une force « réelle » telle que la gravitation ; mais si nous cherchons les bases de cette distinction, elles nous échappent. La force centrifuge disparaît par le choix d'un observateur qui ne tourne pas avec la Terre ; la force de gravitation disparaissait quand nous prenions pour observateur un des habitants de l'obus en chute libre de Jules Verne. Si, de pouvoir annuler un champ de force par un choix convenable de l'observateur est un signe de non-réalité, la gravitation est une force fictive au même titre que la force centrifuge.

On peut objecter que la question n'a pas été discutée à fond. Le choix d'un observateur sans rotation permet d'annuler rigoureusement et en quelque endroit que ce soit, la force centrifuge. Au contraire, quand nous prenons pour observateur un voyageur de Jules Verne, la gravitation disparaît bien, mais seulement au voisinage immédiat du projectile ; il faut remarquer que si des objets libres ne prennent par rapport à l'obus aucune accélération quand ils sont dans son voisinage, ils tombent au contraire vers lui quand ils sont, par rapport à lui, de l'autre côté de la Terre. Nous voyons, par conséquent, que si nous cherchons à nous débarrasser d'un champ de force, nous ne pourrons faire disparaître celui-ci qu'au voisinage d'un certain point, pour le voir en même temps se concentrer partout ailleurs. En un mot, la gravitation ne peut être annulée que localement alors que la force centrifuge peut l'être partout à la fois. Le défaut de l'objection précédente est qu'elle suppose une différenciation expérimentale de la gravitation et de la force centrifuge — autrement dit, elle suppose ce qu'elle veut établir. La résultante de la pesanteur et de la force centrifuge est la seule force obser-

vable et nul observateur ne peut annuler cette résultante en tous les points de l'espace ; il doit se contenter de laisser subsister une force résiduelle. L'observateur sans rotation prétend supprimer la partie fictive de la force observée, ne laissant que ce qu'il regarde comme doué d'une existence réelle (le champ de gravitation normal). Nous ne voyons aucune justification de cette prétention que peut avoir tout aussi bien un des observateurs de Jules Verne.

Il est indéniable que la distinction faite habituellement entre la force centrifuge et la pesanteur a de nombreux avantages dans les calculs mathématiques. Si du reste il n'en avait pas été ainsi, elle n'aurait pas subsisté si longtemps. Mais cette distinction, qui n'a aucune base physique, est purement mathématique et il arrive souvent que la scission d'une expression mathématique en deux termes de natures distinctes, utile dans le travail élémentaire, devient défectueuse dans un travail plus précis où interviennent des termes rectangles, petits il est vrai, mais dont il faut tenir compte.

La mécanique newtonienne part de cette hypothèse qu'il existe quelque « sur-observateur ». S'*il* perçoit un champ de force, la force existe alors réellement. Des êtres inférieurs tels que les habitants du projectile, se font des idées différentes, mais sont victimes d'une illusion. C'est à ce « sur-observateur » que fait appel le mathématicien quand il commence une recherche de dynamique par ces mots : « Prenons des axes rectangulaires sans accélération ox, oy, oz... ». Les axes rectangulaires sans accélération ne sont autres que les instruments de mesure du sur-observateur.

Il est très possible qu'il y ait un sur-observateur dont on soit en droit de regarder les vues comme les plus vraies, ou du moins comme les plus simples. Une société formée de poissons civilisés et instruits conviendrait sans doute que c'est vus par un poisson au repos dans l'océan, que les phénomènes se trouvent le mieux décrits. La mécanique de la relativité, elle, trouve qu'il n'est pas évident du tout qu'il y ait lieu de considérer les vues de tel ou tel observateur comme supérieures à d'autres. Toutes sont sur un pied d'égalité. Considérons un observateur A enfermé dans un projectile en chute libre vers la Terre et un observateur B dans un espace extérieur à tout champ de gravita-

tion ; A et B ne perçoivent aucun champ de force dans leur voisinage. Pourtant, pour la mécanique newtonienne il y a entre les conditions dans lesquelles se trouvent ces deux observateurs une distinction artificielle : l'un B n'est pas du tout dans un champ de force alors que A s'y trouve réellement mais en voit les effet neutralisés par sa propre accélération. Qu'est-ce donc alors, que cette accélération de A ? C'est tout d'abord une accélération relative à la Terre ; mais alors, nous pouvons tout aussi bien admettre une accélération de la Terre par rapport à A et il n'est pas juste de la regarder comme liée à A. Ce qui fait son importance dans la philosophie newtonienne c'est qu'elle est une accélération par rapport à ce que nous avons appelé le sur-observateur. Ce potentat a divisé l'espace tel qu'il lui apparaissait par un réseau de lignes et de plans. J'ai bien peur que l'heure de son abdication n'ait sonné.

Supposons que le système stellaire tout entier tombe en chute libre sous l'influence de l'attraction constante de quelque masse extérieure énorme, comme une goutte de pluie qui tombe sur la Terre. Cette hypothèse créerait-elle quelque modification dans les phénomènes ? Non, aucune. Il y aurait bien un champ de gravitation, mais l'accélération constante de l'observateur et de tous ses points de repère produirait un champ de force qui l'annulerait exactement. Qui pourra dire, alors, ce que c'est qu'une accélération absolue ?

Nous renoncerons donc à nos tentatives de différencier les champs de force artificiels des champs de gravitation naturels, et nous appellerons le champ de force *mesuré* le champ de gravitation, en généralisant l'expression. Ce champ n'a rien d'absolu, et nécessite toujours la spécification de quelque observateur.

On peut éviter de se trouver induit en erreur en reconnaissant tout de suite qu'il existe dans l'influence gravitationnelle qui rayonne des grosses masses certaines complications qui sont absolument caractéristiques. Une théorie qui ne voudrait pas admettre ce point se heurterait sûrement au bon sens. Ce que l'objection faite précédemment nous a montré c'est que le caractère essentiel d'une région voisine de la matière, n'est pas la présence d'un champ de force ; ce doit être quelque chose de plus complexe. Nous aurons à expliquer en temps voulu la

nature de cet effet plus complexe de la matière sur les propriétés de l'Univers.

La règle donnée plus haut, qu'un observateur perçoit un champ de force *artificiel* dès que sa ligne d'Univers présente une courbure non nulle, doit maintenant être remplacée, car ce qu'il nous faut plutôt, c'est une règle déterminant les conditions dans lesquelles il percevra un champ de force quelconque. A vrai dire, la règle primitive a perdu toute signification, car une ligne d'Univers droite n'est pas une conception absolue .Le mouvement uniforme sur une ligne droite n'est pas le même pour un observateur tournant avec la Terre que pour un observateur sans rotation qui doit alors tenir compte des sinuosités introduites dans la trajectoire apparente par la rotation elle-même. Nous avons posé en principe que ces deux observateurs ont la même importance et que leurs jugements méritent le même degré d'attention. Une ligne droite de l'espace-temps n'est donc pas un concept absolu et l'existence d'un observateur est nécessaire pour la définir.

Nous avons vu aussi que si l'observateur et ses instruments de mesure n'obéissent à aucune liaison (s'ils sont donc en chute libre), le champ de force qui les entoure immédiatement s'annule pour eux. Ce n'est qu'au moment où notre observateur est dévié de sa ligne d'Univers propre qu'il a la sensation de se trouver au sein d'un champ de force. En laissant de côté la question du mouvement des corps électrisés que nous devrons soumettre à une étude plus approfondie, l'observateur ne peut abandonner sa ligne d'Univers propre que s'il se trouve dérangé par des chocs matériels, par exemple le bombardement des semelles de ses chaussures par les molécules du sol. Nous pouvons dire alors qu'un corps ne peut quitter sa ligne d'Univers naturelle sans cause visible, et tout champ de force environnant un observateur résulte de ce que celui-ci a quitté sa ligne d'Univers propre sous l'effet d'une pareille cause. Il n'y a rien de mystérieux en ce qui concerne ce genre de force ; il n'est que le reflet des perturbations apportées au mouvement de l'observateur de même que la fuite rapide des maisons et des bois à travers la fenêtre de notre wagon n'est que le reflet du mouvement de notre train.

Notre attention se trouve ainsi attirée vers les lignes d'Univers

naturelles des corps libres qui semblent empreintes d'un certain caractère absolu dans l'Univers à quatre dimensions. Il n'est plus question d'un observateur ici ; le corps paraît suivre la même trajectoire dans l'Univers quel que soit le spectateur de son mouvement. Des observateurs différents décriront cette trajectoire comme étant droite, parabolique ou sinueuse, mais pour tous ce sera la même courbe.

Nous ne pouvons pas avoir la prétention de prédire, sans avoir recours à l'expérience, les lois qui déterminent la nature de ces trajectoires ; mais nous pouvons chercher si notre connaissance actuelle de l'Univers à quatre dimensions est suffisante pour nous permettre de définir des lignes d'Univers de ce genre, ou s'il est nécessaire d'introduire des facteurs hypothétiques nouveaux. En fait nous verrons qu'elle suffit. Nous n'avons jusqu'ici eu affaire qu'à une seule quantité indépendante de l'observateur et possédant une signification absolue : c'était l'*intervalle* entre deux événements de l'espace-temps. Choisissons deux événements P_1 et P_2 suffisamment distants l'un de l'autre. On peut les joindre par une infinité de lignes d'Univers et l'on peut mesurer « l'intervalle total » de chacun des arcs tracés entre P_1 et P_2. Pour être sûr que cet intervalle total est bien mesuré le long de l'arc choisi, on prend un grand nombre de points intermédiaires à P_1 et P_2 sur cet arc ; on mesure l'intervalle de chacun des arcs élémentaires formés et l'on fait la somme. C'est en fait le même procédé que l'on utilise quand on veut mesurer la longueur d'une route sinueuse tracée sur une carte, avec un bout de fil. L'intervalle total d'un certain arc d'une ligne d'Univers est donc quelque chose que l'on peut mesurer d'une manière absolue, puisque tous les observateurs sont d'accord sur la mesure de chacun des intervalles élémentaires. Il s'ensuit que tous les observateurs s'accorderont à reconnaître la même ligne d'Univers (s'il y en a une) comme la plus courte (en intervalle total) de toutes celles qui joignent les deux événements.

Nous avons là un moyen de déterminer dans l'espace-temps, certaines lignes d'Univers qui possèdent une signification absolue et que nous chercherons ensuite expérimentalement à identifier avec les lignes d'Univers naturelles que parcourent des points matériels se mouvant librement.

Sur un point, l'analogie nous a trompés. Le Dr A.-A. Robb a montré ce fait curieux que ce n'est pas la ligne d'Univers la plus courte, mais la plus longue qui est unique (1). Il y a une infinité de lignes d'intervalle total nul joignant P_1 et P_2 ; il n'y en a qu'une de longueur maximum. C'est là une conséquence de la géométrie particulière à laquelle nous a conduits le signe moins devant $(t_2-t_1)^2$. D'après l'équation (1) de la page 65, on voit que si :

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=(t_2-t_1)^2$$

c'est-à-dire si la distance parcourue dans l'espace est égale à celle parcourue dans le temps, s est alors nul. C'est là ce qui arrive quand la vitesse est égale à l'unité — la vitesse de la lumière. Pour aller de P_1 en P_2 en suivant une ligne d'intervalle total nul, nous devons simplement prendre et conserver sans cesse la vitesse de la lumière, faisant des détours s'il est nécessaire jusqu'à ce que le moment soit venu d'arriver en P_2. Il est, d'autre part, bien évident qu'il existe une limite supérieure pour l'intervalle total de la ligne d'Univers car chaque élément de s est toujours inférieur à l'élément correspondant de (t_2-t_1) ; il est donc impossible à s de dépasser (t_2-t_1).

Il existe pour l'intervalle total d'un arc de trajectoire décrit par une particule, une interprétation physique qui nous aide à rendre plus tangible sa signification : c'est le temps que perçoit un observateur ou que mesure une horloge, l'un et l'autre étant liés à la particule mobile. C'est ce qu'on appelle le « temps propre » de la particule ; naturellement, il sera en général différent du temps mesuré par le spectateur indépendant que l'on suppose observer l'ensemble des événements. Pour établir ce point, remarquons que dans l'équation (1) si $x_2=x_1$, $y_2=y_1$, $z_2=z_1$, on tire $s=t_2-t_1$. La condition $x_2=x_1$,.... etc., signifie que la particule doit rester fixe pour l'observateur qui mesure x, y, z, t. Nous serons sûrs qu'il en est bien ainsi si notre observateur en quelque sorte monte sur la particule ; l'inter-

(1) On suppose P_2 dans le futur de P_1 de façon qu'il soit possible à une particule d'aller de P_1 en P_2. Si P_1 et P_2 ont respectivement des situations analogues à O et P' de la Fig. 3, l'intervalle total est imaginaire et c'est la ligne d'Univers la plus courte qui est unique.

valle total s sera alors bien égal à $(t_2—t_1)$, durée que marque son horloge.

Nous pouvons en pratique regarder le temps propre comme généralement équivalent à l'intervalle total ; pourtant, ce terme de temps propre n'est vraiment logique que dans le cas où la ligne d'Univers en question est une ligne naturelle. Pour toute autre ligne il y a un inconvénient à définir un intervalle total comme un temps mesuré par une horloge qui suit la ligne ; c'est qu'il n'existe aucune horloge qui puisse la suivre d'elle-même et sans violer les lois de la nature. Nous pourrions bien en forcer une à décrire une telle ligne mais en agissant sur elle sans cesse, traitement qui risquerait fort de compromettre ses qualités de garde-temps. La définition primitive au moyen de l'équation (1) est la définition la plus générale.

Nous sommes maintenant en l'état de formuler la loi cherchée du mouvement : — Tout point matériel se meut entre un événement P_1 et un autre événement P_2 de façon à suivre la ligne d'Univers dont l'arc P_1P_2 ait l'intervalle total maximum — sauf dans les cas où le point matériel subit les chocs d'autres points matériels ou bien est soumis à des perturbations provenant de forces électriques.

On ne peut mettre cette loi sous la forme d'un truisme analogue à la première loi du mouvement de Newton. La réserve que nous avons faite n'est pas relative à une action indéterminée telle que la force, dont on puisse à volonté étendre la signification pour cacher les imperfections de la loi ; nous n'excluons que les chocs matériels et les causes de nature électromagnétique, celles-ci étant en dehors de notre champ actuel de discussion.

Considérons par exemple les deux événements suivants de l'espace-temps : la position de la Terre au moment actuel et sa position il y a cent ans. Soient P_2 et P_1 ces événements ; dans l'intervalle de ces deux événements la Terre n'a subi aucun choc ; elle a donc emprunté dans son mouvement de P_1 en P_2 la ligne d'Univers d'intervalle total maximum — ou, si nous le préférons, elle a mis le temps propre maximum pour accomplir son trajet. Dans la géométrie étrange de la région de l'espace-temps qu'elle traverse (géométrie qui, sans aucun doute, est dans une certaine mesure associée à notre percep-

tion de l'existence de ce corps massif que nous appelons le Soleil), cette trajectoire d'intervalle total maximum est une hélice — un cercle dans l'espace, transformé en hélice par un déplacement continu dans le temps. Toute autre route aurait eu un intervalle total inférieur.

Il existe des trajectoires que la Terre aurait pu emprunter pour aller de P_1 en P_2 en « un temps nul » — pour un observateur situé sur elle. La Terre se mouvant avec la vitesse de la lumière, ce serait l'arrêt de nos horloges et de tous les mouvements moléculaires de nos cerveaux, grâce auxquels nous est révélée la fuite du temps. Ainsi pour ceux qui vivent sur lui, notre globe pourrait accomplir son travail dans un temps nul. Mais ce n'est pas ainsi qu'il agit et il est tenu d'obéir à certaines règles ; or c'est une règle de cette grande Association ouvrière qui constitue la matière que de mettre le plus de temps possible à accomplir un travail quel qu'il soit.

En opérant ainsi nous ramenons l'étude des champs de force à une étude géométrique. Jusqu'à un certain point, c'est faire un pas en arrière ; nous adoptons la description de Képler du champ gravitationnel du Soleil, à la place de la description newtonienne. Le champ de force se trouve complètement décrit quand nous donnons les lignes d'Univers de particules matérielles lancées dans toutes les directions possibles. Mais, si nous allons en arrière, ce n'est que pour avancer dans une direction nouvelle ; et, pour exprimer cette foule peu maniable de données élémentaires sous une forme unique, on a inventé une géométrie de l'Univers dans laquelle les trajectoires de longueur maximum sont précisément celles que suivent les particules matérielles livrées à elles-mêmes. Il ne reste plus qu'à donner une forme concise aux lois de cette géométrie. La substitution d'une théorie géométrique des champs de force à la théorie mécanique ne constitue pas un changement aussi important qu'on pourrait le croire tout d'abord. Nous faisons de la mécanique une branche de la géométrie, mais nous ne devons pas oublier que la géométrie naturelle n'est elle-même qu'une branche de la mécanique puisque son sujet d'étude est la manière dont se comportent les instruments de mesure matériels.

Nous avons dû faire appel à une géométrie qui nous semble étrange. Il le faut bien, si vraiment la trajectoire de longueur

maximum est une spirale analogue à celle que l'on sait décrite par la Terre. La géométrie non euclidienne est nécessaire. Dans la géométrie euclidienne la trajectoire la plus courte est toujours une ligne droite ; la légère modification que nous avons apportée à la géométrie euclidienne dans le Chapitre **III**, a eu pour résultat de donner une ligne droite comme la trajectoire la plus longue. Les conditions d'établissement d'une géométrie non euclidienne ont été examinées à fond dans le Prologue, et il ne semble y avoir aucune raison de préférer la géométrie euclidienne à moins que l'observation ne décide en sa faveur. L'équation (1) de la page 65 est l'expression de la géométrie euclidienne (ou semi-euclidienne) que nous avions choisie jusqu'ici ; nous aurons à la modifier si nous choisissons une géométrie non euclidienne.

Pourtant il y a cette objection que la géométrie à laquelle nous étions parvenus au Chapitre III n'admettait aucun arbitraire. C'était la synthèse des mesures faites avec des horloges et des règles, par des observateurs animés les uns par rapport aux autres de tous les genres possibles de mouvements uniformes ; c'est là une géométrie que l'on ne peut modifier d'une manière arbitraire pour la rendre compatible avec le mouvement des corps matériels tels que la Terre. Si maintenant, pour mettre les choses au pis, il ne nous était pas possible de mettre en concordance ces deux géométries, l'une basée sur les mesures faites au moyen d'horloges et de règles, l'autre sur les trajectoires naturelles de particules mobiles, et si nous avions à choisir et à conserver l'une de ces géométries, je crois qu'il serait préférable d'adopter la géométrie basée sur le mouvement des particules. Le mouvement d'un point matériel libre est un exemple des phénomènes les plus simples possible ; il est inanalysable ; au contraire, les indications d'une horloge de nature quelconque, les lectures faites sur une règle matérielle comportent évidemment des phénomènes complexes qui font intervenir les secrets de la constitution moléculaire. Chacune de ces deux géométries serait exacte dans sa sphère propre, cependant celle des points matériels mobiles aurait pour elle d'être plus fondamentale que l'autre. Du reste, fort probablement, nous n'aurons pas besoin de choisir, car, horloges, règles, particules mobiles, ébranlements lumineux donnent tous la même

géométrie. C'est là une chose à laquelle on pouvait peut-être s'attendre puisqu'une horloge comprend nécessairement quelque mouvement de particules matérielles.

Une formule telle que l'équation (1) basée sur l'expérience ne peut être vérifiée que jusqu'à un certain degré d'approximation et il sera donc possible, dans une certaine mesure, d'y introduire quelques modifications. Or, il se trouve que l'étude du mouvement d'une particule libre dans une certaine région de l'espace-temps, est une méthode d'exploration de cette région beaucoup plus sensible que n'importe quelle mesure pratique faite avec des règles ou des horloges. Si alors nous nous servons de notre connaissance précise du mouvement des particules pour corriger la formule, nous trouvons que les variations introduites sont si petites qu'elles sont absolument inappréciables dans les mesures courantes effectuées avec nos règles et nos horloges. Il n'y a qu'un cas où il soit possible de déceler la modification, c'est celui qui a trait à la marche d'une horloge située sur la surface du Soleil ; mais l'expérience présente de sérieuses difficultés et aucune réponse n'a encore été donnée. Nous pouvons conclure de ce qui précède que la géométrie de l'espace-temps basée sur le mouvement des particules concorde avec la géométrie basée sur les observations moins précises que l'on fait avec les horloges et les règles ; mais si, plus tard, une expérience future devait révéler une différence, nous nous rallierions à la géométrie de la particule mobile à cause de sa plus grande simplicité.

La modification proposée peut être regardée d'un point de vue différent. L'équation (1) est la synthèse des mesures faites par tous les observateurs en mouvement uniforme ; or, dire qu'ils ont un mouvement uniforme, c'est dire que leurs lignes d'Univers sont des droites. Nous devons supposer que les observateurs se meuvent sur leurs lignes d'Univers naturelles ; sinon en effet, ils percevraient des champs de force dont ils tiendraient sans doute compte dans leurs calculs de manière à tout ramener aux lignes d'Univers naturelles. Si alors l'équation (1) nous montre que ces trajectoires naturelles sont des droites, nous retirons simplement de l'équation ce que nous y avions mis primitivement.

Il est nécessaire de généraliser cette formule d'une autre

manière. Supposons que dans une certaine région de l'espace-temps, pour un observateur déterminé, les lignes d'Univers naturelles soient des droites et que l'équation (1) s'applique rigoureusement. Pour un autre observateur (accéléré) les lignes d'Univers seront courbes, et l'équation ne s'appliquera plus. En mettant les choses au mieux, la forme de cette équation est telle qu'elle n'est valable que pour certains observateurs choisis d'une manière spéciale.

Bien qu'il nous ait fallu analyser plus complètement la signification de notre formule, il n'en résulte aucune ambiguïté dans la mesure de l'intervalle. Sans entrer dans des détails de pure théorie nous pouvons montrer que toute cette partie nouvelle du problème provient uniquement de l'introduction, dans notre schéma du monde, des champs de gravitation. Quand il n'y a aucun champ de ce genre, les trajectoires de toutes les particules libres sont des lignes droites comme l'exige notre première géométrie. Dans une région de l'espace quelconque mais suffisamment petite, nous pouvons trouver un observateur (l'observateur en chute libre) pour lequel la force disparaît et notre formule est valable. La seule modification que nous devons donc apporter à notre règle pour la détermination de l'intervalle est de lui ajouter les deux conditions suivantes : 1° l'intervalle mesuré doit être petit ; 2° les règles et les horloges utilisées dans les mesures doivent tomber en chute libre. La deuxième condition est bien naturelle puisque si nous ne laissons pas tomber nos instruments de mesure en chute libre, nous devons tenir compte de l'effort résistant qui leur est appliqué. La première condition ne nous cause aucun préjudice sérieux puisque tout intervalle peut être décomposé en un nombre plus ou moins grand d'intervalles plus petits et que chacun d'eux peut être mesuré séparément. C'est cet artifice que l'on rencontre en mathématiques sous le nom d'intégration. Pour traduire ce fait que la formule n'est rigoureuse que pour des intervalles infiniment petits on l'écrit :

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2 \tag{2}$$

où dx remplace la différence infiniment petite $x_2 - x_1$, etc...

Cette condition que les instruments de mesure ne doivent être soumis à aucun champ de force se trouve illustrée par le

paradoxe d'Ehrenfest. Considérons une roue en rotation rapide. Chaque élément de sa circonférence se meut dans la direction de sa longueur et l'on pourrait s'attendre à le voir subir la contraction de Fitzgerald, due à sa vitesse ; chaque élément d'un rayon se meut normalement à sa longueur et ne doit par conséquent subir aucune contraction. En un mot, dès que la roue se met à tourner, sa jante devrait se contracter et ses rais demeurer invariables. C'est là une conclusion absurde car une roue qui tourne n'a aucune tendance à se voiler — ce qui serait la seule solution compatible avec les deux conditions précédentes. Le point que nous avons négligé dans ce raisonnement c'est que les résultats auxquels nous avons fait appel ne sont valables que dans le cas de corps entièrement libres qui n'ont aucune accélération par rapport à leur état quand ils décrivent des lignes d'Univers naturelles. Chaque élément de la jante de la roue a une accélération radiale qui modifie ses propriétés d'extension. Quand les accélérations et les vitesses se présentent ensemble, une théorie plus approfondie est nécessaire pour déterminer les variations de longueur.

En résumé, l'intervalle qui sépare deux événements (rapprochés) est une quantité qui possède une signification absolue dans la nature. La ligne d'Univers qui joint deux événements (éloignés) et qui a entre ces deux événements l'intervalle total maximum, possède également une signification absolue. De telles lignes d'Univers sont appelées des *géodésiques* ; elles peuvent se trouver décrites pratiquement car ce sont les trajectoires de particules non troublées par des chocs matériels et le parcours de ces géodésiques nous fournit la méthode la meilleure pour étudier le caractère de la géométrie naturelle de l'Univers. Une méthode auxiliaire consiste à utiliser les règles et les horloges qui, si elles sont parfaitement libres, peuvent mesurer, ou du moins nous le croyons, de petits intervalles d'après la formule (2).

L'identité de ces deux méthodes pour déterminer la géométrie de l'Univers, se trouve liée à un principe que nous devons maintenant énoncer sous sa forme définitive. Nous avons dit qu'aucune expérience n'avait permis de différencier un champ de gravitation d'un champ de force artificiel tel qu'un champ de force centrifuge. Ceci n'est d'ailleurs pas précisément la même

chose que de dire que l'inexistence de cette différence a été démontrée. Il est bon d'être bien explicite quand on fait une généralisation positive à partir de résultats expérimentaux négatifs. La généralisation qui s'offre à nous ici est connue sous le nom de Principe d'Equivalence :

Un champ de gravitation est rigoureusement équivalent à un champ de force artificiel ; il est par suite impossible, dans toute région suffisamment petite de l'espace, de concevoir une expérience permettant de discerner ces deux champs l'un de l'autre.

En d'autres termes, la force est purement relative.

CHAPITRE V

Les différents genres d'Espaces.

The danger of asserting dogmatically that an axiom based on the experience of a limited region holds universally will now be to some extent apparent to the reader. It may lead us to entirely overlook, or when suggested at once reject, a possible explanation of phenomena. The hypothesis that space is not homaloidal [flat], and again that its geometrical character may change with the time, may or may not be destined to play a great part in the physics of the future ; yet we cannot refuse to consider them as possible explanations of physical phenomena, because they may be opposed to the popular dogmatic belief in the universality of certain geometrical axioms — a belief which has risen from centuries of indiscriminating worship of the genius of Euclide (1).

W.-K. Clifford (et K. Pearson), *Common Sense of the Exact Sciences.*

Sur toute surface, il faut se donner deux nombres indépendants, appelés « coordonnées », pour déterminer la position d'un point. Pour cette raison, une surface, qu'elle soit plane ou courbe, est dite un espace à deux dimensions. Dans l'espace à trois dimensions, il faut trois coordonnées pour définir un point, et quatre dans l'espace-temps à quatre dimensions.

(1) Le lecteur peut maintenant se rendre compte, dans une certaine mesure, du danger que présente l'affirmation dogmatique et générale d'un principe uniquement fondé sur l'expérience d'une région limitée de l'Univers. Elle peut nous empêcher de voir ou nous faire rejeter sans examen une explication possible des phénomènes. Nous ignorons si l'hypothèse que l'espace n'est pas euclidien ou celle que ses propriétés géométriques peuvent changer avec le temps sont appelées à jouer un rôle important dans la physique future ; cependant nous ne devons pas refuser de les envisager sous le seul prétexte qu'elles sont en opposition avec la croyance usuelle à l'universalité de certains axiomes géométriques, croyance enracinée en nous par des siècles de culte indiscuté pour le génie d'Euclide.

Pour fixer la position d'un point sur une surface au moyen de deux nombres, on partage cette surface en mailles par un réseau de lignes appartenant à deux familles différentes, chaque ligne d'une famille coupant toutes les lignes de l'autre. On fait correspondre des nombres consécutifs aux lignes successives de chaque famille, ou plutôt aux bandes que ces lignes séparent, de sorte que tout groupe de deux nombres choisis parmi les numéros affectés à chacun des systèmes, sert à définir une maille bien déterminée du réseau de lignes ; si les divisions sont suffisamment rapprochées, tout point peut ainsi se trouver fixé avec toute la précision voulue. C'est cette méthode que l'on utilise par exemple au « Post Office Directory » de Londres pour permettre de situer les rues sur le plan de la ville. Le point (4-2) sera un point de la maille intersection de la rangée n° 4 du premier système avec la rangée n° 2 du deuxième. Si cette indication n'est pas suffisamment précise on divise la rangée n° 4 en dix subdivisions numérotées 4-0, 4-1, etc. On doit poursuivre cette subdivision jusqu'à ce que les mailles soient si petites que les différents points d'une maille puissent être considérés comme confondus au degré de précision que l'on atteint pratiquement.

Les Fig. 10, 11 et 12 montrent trois des systèmes de coordonnées couramment utilisés sur une surface plane.

Si nous parlons des propriétés du triangle formé par les points (1,2), (3,0), (4,0) on ne manquera pas de nous demander aussitôt : Quel système de coordonnées utilisez-vous ? Personne ne pourra figurer ce triangle tant que notre question n'aura pas reçu de réponse. Au contraire, si nous parlons d'un triangle dont les côtés ont 2, 3 et 4 centimètres pour longueurs, n'importe qui avec une règle graduée peut construire le triangle et suivre notre examen de ses propriétés. La distance de deux points peut être donnée sans qu'il soit nécessaire de se rapporter à quelque système de coordonnées et c'est la raison pour laquelle il est important, si nous utilisons un système de coordonnées, de trouver les formules qui expriment la distance de deux points en fonction de leurs coordonnées dans le système utilisé.

Dans le cas de systèmes plus compliqués que les précédents, ce peut être une grande simplification de se contenter des formules se rapportant à des distances extrêmement petites. Le

mathématicien ne trouve alors aucune difficulté à étendre les résultats au cas de distances plus grandes par l'emploi de la méthode appelée intégration. Nous désignerons par ds la distance de deux points infiniment rapprochés l'un de l'autre, par x_1 et x_2 les deux nombres fixant la position de l'un d'entre eux, par dx_1 et dx_2 les variations infiniment petites de ces nombres quand on passe de l'un des points à l'autre. Dans les systèmes particuliers que nous avons figurés on remplace généralement x_1, x_2 par certains symboles consacrés par l'usage : (x, y) pour la Fig. 10, (r, θ) pour la Fig. 11, (ξ, η) pour la Fig. 12.

Les formules différentielles établies géométriquement sont :

Pour les coordonnées rectangulaires (x, y) de la Fig. 10 :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Pour les coordonnées polaires (r, θ) de la Fig. 11 :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Pour les coordonnées obliques (ξ, η) de la Fig. 12 :

$$ds^2 = d\xi^2 - 2k d\xi d\eta + d\eta^2$$

où k est le cosinus de l'angle formé par deux lignes prises chacune dans un système différent.

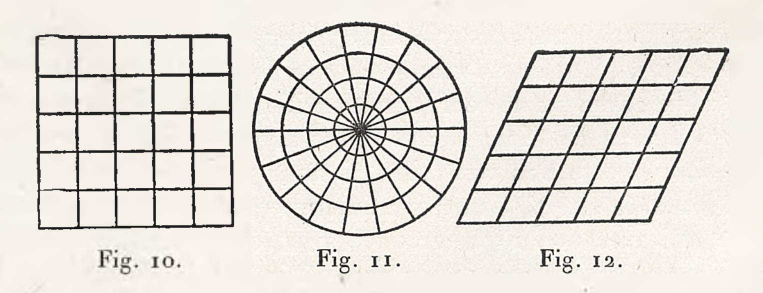


Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12.

Comme exemple de systèmes de coordonnées sur une surface courbe, citons les parallèles et les méridiens tracés sur une sphère.

La latitude étant β, la longitude λ, on a :

$$ds^2 = d\beta^2 + \cos^2\beta d\lambda^2.$$

Chacune de ces expressions est caractéristique du système

de coordonnées correspondant. Peut-être paraît-il inconcevable qu'un observateur puisse hésiter un instant pour savoir si les coordonnées dont il se sert sont celles de la Fig. 10 ou celles de la Fig. 11. Au premier coup d'œil, il voit, semble-t-il, que la Fig. 11 ne représente pas ce qu'il appelle des coordonnées rectangulaires. Mais dans ce coup d'œil, c'est avec ses organes visuels qu'il fait ses mesures, en déterminant des valeurs de ds correspondant à des points pris deux à deux et en notant mentalement la manière dont chacune de ces valeurs est liée au nombre des rangées qui séparent les deux points correspondants. Au fond, il cherche quelle formule pour ds s'adapte aux valeurs qu'il a trouvées. Pendant des siècles, les hommes ont ignoré si la Terre était plate ou ronde — s'ils se servaient de coordonnées planes, rectangulaires ou de quelque genre de coordonnées sphériques. Parfois, un observateur adopte aveuglément un système de coordonnées déterminé et ce n'est que longtemps après qu'il s'aperçoit par des mesures de précision que le ds ainsi mesuré n'est pas du tout conforme à la formule qu'il avait admise — autrement dit que la nature de son système de coordonnées n'est pas celle qu'il croyait. Dans d'autres cas, c'est de propos délibéré qu'il trace un système de genre particulier, par exemple de coordonnées rectangulaires ; pour cela, il construit des angles droits et mène des lignes parallèles ; mais ces constructions n'ont d'autre but que de fixer la manière dont devront se comporter les x et les y, et les règles qui président à ces constructions se ramènent au fond à une formule liant le ds mesuré aux x et aux y.

L'emploi de symboles spéciaux, variables avec le genre du système de coordonnées utilisé, présuppose ainsi une connaissance qui est en réalité déduite de l'aspect des formules. Pour ne pas préciser trop prématurément, il est préférable d'user dans tous les cas indistinctement, des symboles x_1 et x_2. Les quatre genres de coordonnées considérées précédemment donnent alors les relations :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 \quad \text{(rectangulaires).}$$
$$ds^2 = dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 \quad \text{(polaires).}$$
$$ds^2 = dx_1^2 - 2k\,dx_1 dx_2 + dx_2^2 \quad \text{(obliques).}$$
$$ds^2 = dx_1^2 + \cos^2 x_1\, dx_2^2 \quad \text{(latitude et longitude).}$$

Pour trouver la nature d'un système de coordonnées nous ferons un certain nombre de mesures du ds correspondant à des points adjacents (x_1, x_2) et (x_1+dx_1, x_2+dx_2) ; puis nous chercherons quelle formule s'adapte aux valeurs trouvées. Si, par exemple, nous trouvons que ds^2 est toujours égal à $dx_1{}^2 + x_1{}^2dx_2{}^2$ nous saurons que notre système est de la même nature que celui de la Fig. 11 ; x_1 et x_2 sont alors ce qu'on désigne sous le nom de coordonnées polaires r et θ. Dire qu'on se sert de coordonnées polaires n'est pas nécessaire car cela n'ajoute rien à ce que nous savons, qui ne soit déjà contenu dans la formule. Ce n'est qu'une simple question de dénomination ; mais, bien entendu, le nom donné rappelle à notre esprit nombre de propriétés qui nous sont familières et qui sans lui pourraient fort bien ne pas s'imposer à nous.

Ainsi, c'est un caractère des coordonnées polaires qu'il n'y a qu'un point pour lequel x_1 (ou r) est égal à o, alors que dans d'autres systèmes $x_1=0$ représente une ligne. C'est là une propriété que l'on voit immédiatement sur la formule ; si, en effet, nous avons deux points pour lesquels $x_1=0$, $x_1+dx_1=0$ respectivement, alors :

$$dx_1{}^2 + x_1{}^2dx_2{}^2 = 0.$$

La distance entre ces deux points s'annule donc et les deux points sont confondus.

Les formules précédemment écrites peuvent se mettre sous la forme générale :

$$ds^2 = g_{11}dx_1{}^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2{}^2,$$

où g_{11}, g_{12}, g_{22} sont des constantes ou des fonctions de x_1 et x_2. Ainsi dans le quatrième exemple donné leurs valeurs sont 1, 0, $\cos^2 x_1$. On trouve que tous les systèmes de coordonnées possibles conduisent pour l'expression du ds^2 à des formules qui peuvent revêtir cette forme générale ; par suite, ce qui caractérise le système de coordonnées ce sont ces trois fonctions de position g_{11}, g_{12}, g_{22} que l'on peut déterminer par des mesures physiques. Ces trois quantités prennent quelquefois le nom de potentiels.

Nous en arrivons maintenant à un point capital. La formule du ds^2 ne nous apprend pas seulement le caractère du système

raîtrait comme un espace de nature différente et c'est la mesure qui lui révélerait cette différence.

Il y a naturellement bien d'autres genres de systèmes de coordonnées et d'espaces à deux dimensions que ceux que nous avons donnés dans nos quatre exemples. Il est clair que ce n'est pas un problème simple de reconnaître le genre d'espace d'après les valeurs des g. Il n'existe aucun caractère visible dans un examen rapide qui puisse nous suggérer la raison pour laquelle les trois premières formules se rapportent toutes au même genre d'espace et la quatrième à un genre différent. Ce sont les mathématiciens qui ont découvert le lien qui unit ces trois formules. Les fonctions g_{11}, g_{12}, g_{22} satisfont dans les trois cas à une certaine équation différentielle (1); et, chaque fois que cette équation est vérifiée, on se trouve en présence du même genre d'espace.

Il doit sans doute paraître bien maladroit de recourir à un tel procédé pour trouver les différences intrinsèques des genres d'espace — introduire des potentiels qui, par leur nature même, se rapportent à un système particulier de coordonnées, système qui peut n'avoir rien à faire avec la question. C'est une chose singulière que nous soyons incapables d'exprimer les différences entre les divers genres d'espaces sous une forme assez pure pour n'être plus obligés d'y mêler des différences dans les potentiels qui sont parfaitement étrangères au problème. Malheureusement nous n'avons ni le vocabulaire, ni l'imagination nécessaires pour faire une description de propriétés absolues analogues à celles-là. Toute science physique est relative à des divisions déterminées de l'espace et du temps, et, pour arriver à connaître l'absolu, il faut passer par le relatif. L'absolu peut être défini comme un relatif qui serait toujours le même quel que soit l'objet auquel il se rapporte (2). Nous sommes convaincus que l'absolu existe, mais nous ne pouvons lui assigner une place dans le domaine de nos connaissances sans être forcé d'imaginer quelque « mannequin », inutile par ailleurs, qui nous serve à le supporter. C'est ainsi que les différences abso-

(1) Voir Appendice. Note 4.

(2) Cf. page 39, où nous avons pu voir la différence qui existe entre une science où l'on ne particularise pas l'observateur et une autre où l'on s'en passe complètement.

de coordonnées employé, mais il nous montre aussi et surtout la nature de l'espace à deux dimensions qui, elle, est indépendante de tout système de coordonnées. Si ds^2 satisfait à l'une quelconque des trois premières formules écrites, l'espace est alors de la même nature qu'un plan ; si au contraire ds^2 satisfait à la dernière formule l'espace est une surface courbe de la nature d'une sphère. Essayez tant que vous voudrez, vous n'arriverez jamais à tracer sur une surface plane (euclidienne) un système de coordonnées satisfaisant à la quatrième formule.

Si un être condamné à vivre dans un univers à deux dimensions trouvait que ses mesures sont conformes à la première formule, il pourrait aussi les rendre conformes à la deuxième et à la troisième formule en traçant simplement d'une manière différente son système de coordonnées. Mais, pour lui permettre d'obtenir la quatrième formule il faudrait qu'on le transportât dans un univers entièrement différent.

Nous voyons donc qu'il existe des genres différents d'espaces à deux dimensions qui nous sont révélés par des propriétés métriques également différentes pour chacun d'eux. Ces espaces, la nature peut les offrir à notre vue, car ils ne sont autres que les différentes surfaces de l'espace euclidien à trois dimensions. C'est là une image qui peut nous servir dans certains cas mais peut-être nous induire en erreur dans d'autres. Les propriétés intrinsèques que présente une feuille de papier ne sont pas modifiées quand nous enroulons la feuille sur un cylindre — les mesures doivent, bien entendu, se faire en restant dans le continuum à deux dimensions que constitue le papier et elles ne doivent emprunter aucun chemin de traverse mené à travers l'espace. Les formules sont aussi bien applicables au plan qu'au cylindre, et tant que notre image nous oblige à faire une distinction entre le plan et le cylindre, elle nous trompe. Au contraire, ces formules ne sont pas applicables à une sphère car celle-ci ne peut être enveloppée par la feuille de papier, sans plis ou déchirures de cette feuille. Un être rigoureusement réduit à deux dimensions ne pourrait s'apercevoir d'aucune différence entre un cylindre (1) et un plan, tandis que la sphère lui appa-

(1) Il serait peut-être préférable de dire un rouleau, pour éviter la question de la soudure des deux bords de la feuille.

de coordonnées employé, mais il nous montre aussi et surtout la nature de l'espace à deux dimensions qui, elle, est indépendante de tout système de coordonnées. Si ds^2 satisfait à l'une quelconque des trois premières formules écrites, l'espace est alors de la même nature qu'un plan ; si au contraire ds^2 satisfait à la dernière formule l'espace est une surface courbe de la nature d'une sphère. Essayez tant que vous voudrez, vous n'arriverez jamais à tracer sur une surface plane (euclidienne) un système de coordonnées satisfaisant à la quatrième formule.

Si un être condamné à vivre dans un univers à deux dimensions trouvait que ses mesures sont conformes à la première formule, il pourrait aussi les rendre conformes à la deuxième et à la troisième formule en traçant simplement d'une manière différente son système de coordonnées. Mais, pour lui permettre d'obtenir la quatrième formule il faudrait qu'on le transportât dans un univers entièrement différent.

Nous voyons donc qu'il existe des genres différents d'espaces à deux dimensions qui nous sont révélés par des propriétés métriques également différentes pour chacun d'eux. Ces espaces, la nature peut les offrir à notre vue, car ils ne sont autres que les différentes surfaces de l'espace euclidien à trois dimensions. C'est là une image qui peut nous servir dans certains cas mais peut-être nous induire en erreur dans d'autres. Les propriétés intrinsèques que présente une feuille de papier ne sont pas modifiées quand nous enroulons la feuille sur un cylindre — les mesures doivent, bien entendu, se faire en restant dans le continuum à deux dimensions que constitue le papier et elles ne doivent emprunter aucun chemin de traverse mené à travers l'espace. Les formules sont aussi bien applicables au plan qu'au cylindre, et tant que notre image nous oblige à faire une distinction entre le plan et le cylindre, elle nous trompe. Au contraire, ces formules ne sont pas applicables à une sphère car celle-ci ne peut être enveloppée par la feuille de papier, sans plis ou déchirures de cette feuille. Un être rigoureusement réduit à deux dimensions ne pourrait s'apercevoir d'aucune différence entre un cylindre (1) et un plan, tandis que la sphère lui appa-

(1) Il serait peut-être préférable de dire un rouleau, pour éviter la question de la soudure des deux bords de la feuille.

lues des divers genres d'espaces apparaissent toujours comme liées à quelque système de coordonnées jouant un rôle de « mannequin » et n'ayant aucun rapport direct avec le problème.

Les résultats trouvés dans le cas de deux dimensions peuvent être généralisés et étendus à l'espace-temps à quatre dimensions. On remplacera la distance par l'intervalle qui, il faut s'en souvenir, est une quantité absolue, indépendante par conséquent du système de coordonnées employé. On divise l'espace-temps en un système quelconque de mailles, chaque maille étant la partie commune à quatre bandes infiniment petites chacune dans une dimension ; on fixe alors la position d'un point par quatre nombres, ses coordonnées, x_1, x_2, x_3, x_4. Par analogie la formule générale sera :

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11}dx_1{}^2 + g_{22}dx_2{}^2 + g_{33}dx_3{}^2 + g_{44}dx_4{}^2 \\ & + 2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + 2g_{14}dx_1dx_4 + 2g_{23}dx_2dx_3 \\ & + 2g_{24}dx_2dx_4 + 2g_{34}dx_3dx_4. \end{aligned} \tag{3}$$

La seule différence est qu'il y a maintenant dix fonctions g ou potentiels, au lieu de trois, pour synthétiser les propriétés métriques du système de coordonnées. Quand on donne des valeurs particulières aux potentiels il est bon de les disposer sur le modèle du tableau suivant :

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ & & g_{33} & g_{34} \\ & & & g_{44}. \end{matrix}$$

L'espace-temps dont nous avons étudié les propriétés dans le Chapitre III répond à la formule (2) page 93 :

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2.$$

Ici, $x\ y\ z\ t$ sont les symboles conventionnels remplaçant respectivement $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ dans le système particulier considéré — c'est-à-dire coordonnées d'espace rectangulaires et temps. Les potentiels ont les valeurs suivantes :

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 \\ & & & +1, \end{matrix}$$

que l'on désigne sous le nom de « valeurs galiléennes ». Si les potentiels ont ces valeurs en tout point, l'espace-temps peut être qualifié de « plan » ou « euclidien » car sa géométrie est celle d'un plan tracé dans l'espace euclidien à cinq dimensions. Nous rappelant les résultats trouvés dans le cas de deux dimensions nous reconnaîtrons aisément qu'un groupe de valeurs des potentiels entièrement différent du précédent peut aussi appartenir à un Univers euclidien car les mailles de notre réseau peuvent être déterminées de bien des manières. Il doit être bien entendu que :

1° Seules les valeurs des potentiels nous permettent de définir le genre d'espace auquel on a affaire, valeurs qui se déterminent pratiquement par des mesures d'intervalles.

2° Des valeurs différentes des potentiels ne définissent pas nécessairement des genres d'espace-temps différents.

3° Il existe une relation mathématique plus ou moins compliquée commune à toutes les valeurs des potentiels appartenant à un même genre d'espace-temps, et à laquelle ne satisfont pas celles appartenant à un genre différent. Cette propriété s'exprime à l'aide d'un groupe d'équations différentielles auxquelles satisfont les potentiels g.

Nous pouvons maintenant montrer que l'espace-temps dans lequel nous vivons, n'est pas rigoureusement euclidien. Si en effet il l'était, nous pourrions construire un système de mailles pour lequel les g auraient les valeurs galiléennes ; la géométrie par rapport à cette division particulière de l'espace et du temps serait celle que nous avons discutée au Chapitre III et nous savons que pour cette géométrie les géodésiques — trajectoires naturelles de particules matérielles — sont des droites.

Ainsi, dans un Univers euclidien la loi du mouvement (en supposant les coordonnées convenablement choisies) nous apprend que toute particule matérielle libre qui n'a pas à subir les chocs d'autres particules, se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme. Il n'en est sûrement pas ainsi dans notre monde ; les planètes, par exemple, ne se meuvent pas sur des droites et pourtant elles ne subissent aucun choc. Il est vrai que si nous portons notre attention sur une région restreinte de l'espace, telle que l'intérieur de l'obus de Jules Verne, toutes les lignes d'Univers, pour un observateur convenablement choisi, devien-

nent des droites ; dans le langage courant on dit que cet observateur ne perçoit aucun champ de force. Il faut une région étendue de l'espace pour manifester les différences de géométries. Nous ne devons pas en être surpris car nous ne pouvons dire si une surface est plane ou courbe avant d'en avoir examiné une région suffisamment étendue.

Pour Newton, à grande distance de toute masse matérielle, en dehors de tout champ d'attraction, les particules libres ont toutes un mouvement rectiligne et uniforme. A grande distance de toute matière, l'espace-temps a donc une tendance à devenir rigoureusement euclidien. C'est un fait qu'on ne peut contrôler expérimentalement qu'avec un certain degré d'approximation et l'on peut avoir quelque doute quant à sa rigueur absolue. Nous examinerons plus en détail ce point au Chapitre X et en attendant, nous supposerons avec Newton qu'à une distance suffisamment grande de toute matière ou de tout rayonnement, l'espace-temps est euclidien et qu'il ne présente une courbure qu'au voisinage de l'un ou de l'autre. C'est cette sorte de ride autour de la matière ou du rayonnement qui nous en expliquera les effets de gravitation.

Nous nous sommes représenté les différents genres d'espace à deux dimensions comme les différentes surfaces que l'on peut concevoir dans notre espace à trois dimensions ; nous pouvons de même nous représenter les divers genres d'espace-temps à quatre dimensions comme les différentes surfaces d'un espace euclidien à cinq dimensions. N'oublions pas, du reste, que ce n'est là qu'une image [1]. La cinquième dimension, ce n'est ni de l'espace, ni du temps, ni quoi que ce soit que nous puissions percevoir ; dans l'état actuel de nos connaissances, c'est un non-sens. Je ne veux pas en parler comme d'une fiction mathématique, car elle est loin d'apporter des avantages sérieux au raisonnement mathématique. Elle est même passible de nous induire en erreur car elle crée des distinctions, analogues à celle qui sépare un plan d'un rouleau, qui n'ont aucun sens

[1] Un espace à cinq dimensions suffit pour expliquer la propriété dont nous nous occupons actuellement ; mais, pour avoir une image exacte de la géométrie de l'Univers, il faut faire appel à un espace euclidien à dix dimensions. Nous pouvons nous demander si les avantages de la géométrie euclidienne peuvent suffire à justifier une pareille complication.

absolu. Elle n'a été introduite, comme la notion du champ de force qui agit dans l'espace et dans le temps, que pour conserver la géométrie euclidienne dans les cas où celle-ci se montre manifestement insuffisante et impropre. La seule chose qui permet de différencier réellement les divers genres d'espace-temps, c'est que ceux-ci ont des géométries différentes qui entraînent des propriétés également différentes des fonctions g. On n'explique rien en disant que s'il en est ainsi, c'est parce que les différentes surfaces dans un espace euclidien réel à cinq dimensions présentent des courbures différentes. Il serait alors naturel de demander pour quelle raison cet espace à cinq dimensions est euclidien ; l'on répondrait sans doute : parce qu'il est plan dans l'espace euclidien réel à six dimensions ; et ainsi de suite, *ad infinitum*.

La seule valeur qu'ait pour nous cette image, c'est qu'elle nous permet de décrire des propriétés importantes en termes courants tels que « rides » ou « courbures » au lieu d'user d'expressions théoriques comme « invariants différentiels ». Nous devons toutefois nous méfier car on ne peut pas toujours se baser sur l'analogie pour étendre sans précaution les propriétés de l'espace à trois dimensions à un espace à un nombre supérieur de dimensions. L'auteur de ces lignes se souvient très vivement d'une période de grosse perplexité qu'il traversa parce qu'il ne s'était pas bien rendu compte qu'un espace à quatre dimensions sans « courbure », n'est pas identique à un espace euclidien ! La géométrie à trois dimensions ne nous prépare pas le moins du monde à ce genre de surprises.

Si nous nous représentons la région de l'espace-temps occupée par le champ de gravitation de la Terre comme une ride sur notre Univers à quatre dimensions, nous remarquerons aussitôt que nous ne pouvons pas dire que cette ride se trouve en un point déterminé ; elle est quelque part dans les environs de ce point. En un point donné, nous pouvons toujours effacer la ride par un changement du système de référence, mais cette singularité va se réfugier quelque part ailleurs. C'est ce que firent les habitants du projectile de Jules Verne ; ils aplanirent la ride à l'intérieur du projectile, de sorte qu'il leur fut impossible d'y déceler le moindre champ de force ; mais par là-même, ils accentuèrent le défaut ailleurs et c'est ainsi qu'ils auraient

trouvé, par exemple, un accroissement du champ de gravitation (relativement à eux) dans la région de la Terre opposée à la leur.

Ce qui détermine l'existence de la ride, ce ne sont pas les valeurs des g, ou, ce qui revient au même, le champ de force à l'endroit où elle se trouve ; c'est la manière dont ces valeurs en un point sont liées aux valeurs en d'autres points voisins, c'est le gradient des fonctions g et plus particulièrement le gradient du gradient. En d'autres termes, comme nous l'avons déjà dit, le genre d'espace-temps est défini par des équations différentielles.

Donc, s'il est vrai qu'un champ de gravitation n'a pas un caractère absolu, qu'on peut le reproduire ou l'annuler en un point quelconque par l'accélération du mouvement de l'observateur ou par un changement dans son système de coordonnées, pourtant une particule matérielle, par sa seule présence, modifie l'Univers qui l'environne d'une manière absolue que l'on ne peut imiter artificiellement. La gravitation est une force relative tandis que la courbure de l'Univers est un caractère absolu, mais plus complexe, de l'influence gravitationnelle.

Nous devons maintenant nous poser une question. La nature peut-elle, dans des régions vides de matière, nous présenter tous les genres possibles d'espace-temps ? Supposons que nous donnions aux dix potentiels des valeurs parfaitement arbitraires en chaque point ; nous déterminons ainsi la géométrie d'un espace-temps possible au point de vue mathématique ; mais, peut-on espérer rencontrer réellement ce genre d'espace-temps dans la nature — comme effet d'une distribution spéciale de la matière autour de la région vide considérée ?

Non, pas nécessairement. Il n'y a que certains genres que la nature puisse nous offrir dans une région vide de matière, et la loi qui détermine ces genres possibles réellement, porte le nom de loi de gravitation.

Il est bien évident, puisque nous avons ramené la théorie des champs de force à une théorie géométrique de l'Univers, que s'il existe une loi portant sur les champs de force (y compris le champ de gravitation), cette loi doit avoir le caractère d'une restriction imposée à toutes les géométries possibles de l'Univers.

Dans un problème donné, on parvient au choix des fonctions g convenables en trois étapes successives : 1° on peut éliminer

d'abord de nombreux systèmes de valeurs des g parce qu'ils ne se rencontrent pas effectivement dans la nature — 2° d'autres, bien que possibles réellement, ne répondent pas au genre particulier d'espace-temps que comporte le problème envisagé — 3° de tous les groupes restants, un seul est compatible avec le système de coordonnées choisi. Reste à trouver maintenant la loi qui nous permet de faire la première élimination. Quel est le criterium qui nous permet de savoir quelles valeurs de g donnent un genre d'espace-temps possible réellement ?

Dans la solution de ce problème, Einstein n'a eu pour se guider que les deux indications suivantes :

1° Puisque la question est de savoir si tel ou tel genre d'espace-temps est possible réellement, le criterium doit être lié aux propriétés des fonctions g qui permettent de distinguer les divers espaces-temps entre eux et non à celles qui permettent la distinction des différents genres de systèmes de coordonnées relatifs à un même espace-temps. Les formules qui expriment cette condition de possibilité ne doivent donc pas se trouver modifiées par un changement du système de coordonnées.

2° Nous savons que l'espace-temps euclidien peut exister dans la nature (à grande distance de toute matière attirante). Le criterium doit donc être vérifié par des valeurs quelconques des g appartenant à un tel espace-temps.

Il est remarquable que ces indications si vagues en apparence soient suffisantes pour déterminer d'une manière presque univoque la condition cherchée. Une fois cette loi trouvée, on devra la soumettre à l'expérience et voir si l'observation la confirme.

L'indépendance des lois de la nature par rapport au système de référence se trouve parfois exprimée d'une manière un peu différente. Il y a un type d'observations qui doit être, sans aucun doute, complètement indépendant de toutes les conditions possibles dans lesquelles se trouve l'observateur : c'est la coïncidence parfaite d'événements dans l'espace et dans le temps. La trajectoire d'une particule dans l'espace-temps à quatre dimensions est ce que nous avons déjà appelé sa ligne d'Univers ; les lignes d'Univers de deux particules se rencontrent ou non ; le point de vue de l'observateur n'intervient aucunement dans ce résultat. Dans la mesure où notre science de la nature est fondée sur des intersections de lignes d'Univers, elle est absolue

et indépendante de l'observateur. Pour étudier la nature de nos observations, il nous faut faire une distinction entre ce que nous voyons réellement et ce qui n'est qu'une pure déduction ; nous constatons que, du moins dans les mesures de précision, nos connaissances sont basées sur les intersections des lignes d'Univers de deux ou de plus de deux entités, c'est-à-dire sur des coïncidences absolues. Un électricien dira, par exemple, qu'il observe un courant de 5 milliampères ; ce n'est qu'une déduction : son observation réelle c'est la coïncidence de l'image d'un fil fournie par un miroir fixé au galvanomètre, avec une certaine division d'un règle graduée. Un météorologiste trouve que la température de l'air est de 25°, mais son observation c'est la coïncidence du sommet de la colonne de mercure avec la division 25 de l'échelle de son thermomètre. Il serait extrêmement difficile de décrire en langage de coïncidences les résultats des expériences physiques les plus simples. Et cependant ce que nous observons en fait, c'est l'existence ou la non-existence de la coïncidence, et non pas quand, ni où, ni comment cette coïncidence a lieu ; et, si nous ne voulons pas nous contenter d'une science relative, le lieu, le moment et les autres circonstances de tout phénomène doivent à leur tour être décrits à l'aide d'autres coïncidences. Il paraît clair que si l'on pouvait tracer toutes les lignes d'Univers, de manière à mettre en évidence leurs intersections avec leur ordre propre, parfaitement arbitraire du reste, on aurait là une histoire complète de l'Univers et rien ne se trouverait omis qui soit du domaine de l'observation.

Supposons tracé un tel réseau de lignes d'Univers et imaginons-le placé dans une masse gélatineuse. Si maintenant nous déformons cette gelée d'une manière quelconque, chaque ligne d'Univers se déformera, mais les intersections continueront à se succéder dans le même ordre et aucune intersection supplémentaire ne se trouvera créée. La gelée déformée nous donnera une histoire du monde aussi exacte qu'avant sa déformation, et il n'existe aucun criterium qui nous permette de dire qu'une des deux représentations est préférable à l'autre.

Supposons maintenant que nous introduisions des divisions de l'espace et du temps, ce que nous pourrions faire en traçant des mailles rectangulaires dans les deux états successifs de la

gelée. Nous avons maintenant deux manières de situer les lignes d'Univers et les événements dans l'espace et dans le temps, manières que nous devons traiter sur un pied d'égalité. Evidemment, nous ne changerons rien au résultat si, au lieu de déformer d'abord la gelée puis d'introduire des mailles régulières, nous introduisons des mailles irrégulières dans une gelée non déformée. Tous les systèmes de mailles sont donc équivalents.

Ces considérations nous montrent que la *forme* n'est pas une qualité inhérente à l'Univers absolu, de sorte qu'un système de mailles que nous introduisons ne possède aucune forme initiale et qu'un système de coordonnées rectangulaires n'est pas, au fond, différent de tout autre système.

Revenons aux deux indications qui ont guidé Einstein ; la première nous permet de donner un coup de balai énergique au milieu de toutes les lois que l'on peut imaginer ; entre autres se trouve balayée la loi de Newton. Cette méthode d'élimination peut se comprendre facilement sur un exemple ; il nous suffira de considérer le cas de deux dimensions. Soit dans le système de coordonnées (x, y) :

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2,$$

et dans un autre système (x', y') :

$$ds^2 = g'_{11}dx'^2 + 2g'_{12}dx'dy' + g'_{22}dy'^2.$$

La première condition d'Einstein dit que la loi cherchée doit rester vérifiée quand les lettres non accentuées sont partout respectivement remplacées par les lettres accentuées. Supposons que nous essayions la loi $g_{11} = g_{22}$. Changeons notre système de coordonnées en donnant aux lignes y un écartement double de l'écartement primitif ; autrement dit $y' = \frac{1}{2}y$ avec $x' = x$. Alors :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2 \\ &= g_{11}dx'^2 + 4g_{12}dx'dy' + 4g_{22}dy'^2, \end{aligned}$$

de sorte que :

$$g'_{11} = g_{11}, \qquad g'_{22} = 4g_{22}.$$

Si g_{11} est égal à g_{22}, g'_{11} ne peut être égal à g'_{22}.

Après un certain nombre d'essais infructueux, le lecteur pourra s'étonner qu'une loi quelconque puisse résister à l'épreuve, tant il paraît facile de metre en échec une loi prise au hasard à l'aide d'un simple changement de système de coordonnées. Il est certainement bien peu probable qu'on arrive jamais à trouver une loi acceptable à l'aide de cette méthode. Il y a cependant des lois composées d'expressions mathématiques extrêmement compliquées qui satisfont à la condition imposée. La théorie qui permet de les obtenir s'appelle la « théorie des tenseurs » ; elle est due à de purs mathématiciens comme Riemann, Christoffel, Ricci, Levi-Civita, qui, on peut le présumer, n'ont jamais songé qu'elle pouvait avoir une application physique.

Une loi de ce genre est la condition qui exprime que l'espace-temps est euclidien ; on l'écrit généralement sous la forme simple mais obscure :

$$B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0. \qquad (4)$$

Le membre de gauche de l'équation est ce que l'on nomme le tenseur de Riemann-Christoffel ; une forme plus explicite de cette expression est donnée dans l'Appendice [1]. Les lettres μ, ν, σ, ρ désignent en quelque sorte des cases vides dont chacune doit se trouver remplie par l'un quelconque des nombres 1, 2, 3, 4 choisi arbitrairement. (Quand l'expression est explicitée, les indices μ, ν, σ, ρ figurent parmi les indices des x et des g). En comblant ces vides de différentes manières, on obtient un grand nombre d'expressions B^{1}_{111}, B^{4}_{123}, B^{1}_{432}, etc... L'équation (4) exprime précisément que toutes ces quantités sont nulles. Le nombre total de ces expressions est $4^4 = 256$; mais nombre d'entre elles se trouvent reproduites plusieurs fois. Il n'y a que vingt équations réellement indépendantes ; les autres ne font que répéter la même chose plusieurs fois.

Il est clair que la loi (4) n'est pas la loi de gravitation que nous cherchons, car elle est beaucoup trop restreinte et trop rigide. Si c'était une loi naturelle, il ne pourrait y avoir dans la nature qu'un espace-temps euclidien et il n'y aurait rien d'analogue à la

[1] Appendice. Note 5.

gravitation. Ce n'est pas la loi générale, mais seulement un cas particulier — celui où toute masse attirante est rejetée à l'infini.

Il peut être extrêmement utile néanmoins, dans la recherche d'une condition générale, de connaître un cas particulier. N'y aurait-il pas lieu de choisir un certain nombre des vingt équations pour leur faire jouer le rôle de conditions à remplir dans le cas général, les équations restantes ne devant se trouver vérifiées que dans le cas particulier ? Malheureusement ces équations se tiennent les unes les autres, et tant que nous ne les prenons pas toutes à la fois, les conditions qu'elles expriment ne sont pas indépendantes du système de coordonnées. Il y a tout de même un moyen de déduire de ces 20 équations un groupe de conditions moins restreintes et indépendantes du système de coordonnées. Soit :

$$G_{11} = B^1_{111} + B^2_{112} + B^3_{113} + B^4_{114},$$

et plus généralement :

$$G_{\mu\nu} = B^1_{\mu\nu 1} + B^2_{\mu\nu 2} + B^3_{\mu\nu 3} + B^4_{\mu\nu 4} ;$$

le groupe des conditions exprimées par l'équation symbolique générale :

$$G_{\mu\nu} = 0 \qquad (5)$$

possède toutes les qualités voulues pour traduire une loi générale de la nature.

Cette loi est indépendante du système des coordonnées, ce que l'on ne peut du reste montrer que par des calculs laborieux. Evidemment, si tous les B s'annulent, l'équation (5) est satisfaite ; par suite, l'espace-temps euclidien est parfaitement compatible avec cette loi naturelle. De plus cette équation symbolique a une signification plus large que la condition de planéité et admet l'existence d'un groupe limité de géométries non euclidiennes. En nous débarrassant des répétitions, nous voyons qu'elle équivaut à dix équations qui ne sont d'ailleurs pas distinctes car quatre d'entre elles sont conséquences des six autres ; la loi de gravitation comporte donc six conditions (1).

(1) Isolons par la pensée une région vide de l'espace-temps et suppo-

Nous voici donc en possession d'une loi $G_{\mu\nu}=o$ que nous croyons être la loi générale de gravitation. A l'expérience maintenant de décider si oui ou non nos présomptions sont fondées. Cette loi, en particulier, doit dans les cas ordinaires se réduire à quelque chose de si proche de la loi de Newton qu'une confirmation précise de cette dernière par l'observation puisse être regardée comme une confirmation de la première. Il est, de plus, nécessaire de voir s'il existe des cas singuliers où l'on peut déceler une différence entre elle et la loi de Newton. Nous verrons que de tels essais ont été faits avec succès.

Quelle eût été notre situation si cette loi avait été mise en échec ? Nous aurions d'abord continué à chercher d'autres lois satisfaisant aux deux conditions énoncées plus haut ; mais nous aurions été conduits ainsi à des complications mathématiques considérables. De plus, je crois que cela ne nous aurait pas servi à grand'chose car, pratiquement, les autres lois auraient été indiscernables de celle plus simple que nous avons proposée — c'est là d'ailleurs un point qui n'a pas encore reçu une démonstration rigoureuse. L'autre branche de l'alternative aurait été d'admettre qu'il y a dans la nature une cause de force ne rentrant pas dans le schéma géométrique de l'Univers, admis jusque-là, de sorte que la force n'aurait pas été purement relative et que le sur-observateur de Newton aurait existé.

La meilleurs manière d'apercevoir la signification de notre théorie est peut-être de l'observer du point de vue d'un continuum euclidien à dix dimensions dans lequel on regarde l'espace-temps comme une surface particulière à quatre dimensions. Nous devons remarquer que dans un continuum à dix dimensions, il existe tous les intermédiaires entre la surface plane et la sur-

sons connus les potentiels en tout point extérieur à cette région. On pourrait alors d'après la loi de gravitation déterminer la nature de l'espace-temps dans la région en question ; les dix équations différentielles de la loi auxquelles on joindrait les conditions aux limites suffiraient à déterminer exactement les dix potentiels à l'intérieur de la région ; mais, non seulement se trouverait déterminée la nature de l'espace-temps, mais aussi celle du système de coordonnées, alors que ce système doit être parfaitement arbitraire à l'intérieur de la région, arbitraire d'ordre 4 correspondant à l'indétermination dans la division des quatre dimensions de l'espace-temps ; c'est là la raison pour laquelle le nombre des équations cherchées est réduit à six.

face à courbure complète, intermédiaires que nous pouvons désigner sous le nom de surfaces courbes « au premier degré » et « au second degré » [1]. La distinction que l'on fait entre ces types de surfaces est un peu dans le genre de celle que présentent les courbes de l'espace qui peuvent être simplement « courbées » comme un cercle ou « tordues » comme une hélice ; l'analogie, d'ailleurs, n'est qu'assez lointaine. La courbure complète d'une surface est une quantité G formée à partir des différents termes de $G_{\mu\nu}$ un peu comme ces termes eux-mêmes sont formés à partir du tenseur $B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$. On peut établir les conclusions suivantes :

Si $B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$ (20 conditions)

l'espace-temps est euclidien. C'est l'état d'une région de l'Univers à une distance infinie de toute masse attirante et plus généralement de toute forme d'énergie.

Si $G_{\mu\nu} = 0$ (6 conditions)

l'espace-temps est courbe au 1er degré. C'est l'état d'une région vide de l'Univers — ne contenant ni matière, ni lumière, ni champs électromagnétiques, mais située dans le voisinage de ces formes d'énergie.

Si $G = 0$ (1 condition)

l'espace-temps est courbe au 2e degré. C'est l'état d'une région de l'Univers ne contenant ni matière, ni électrons (énergie liée) mais renfermant de la lumière ou des champs électromagnétiques (énergie libre).

Si $G \neq 0$

l'espace-temps est à courbure complète. C'est l'état d'une région de l'Univers contenant une matière continue.

D'après les théories courantes de la physique, la matière continue n'existe pas, de sorte qu'à vrai dire, le dernier cas ne se présente jamais. La matière est constituée par des électrons ou d'autres particules. Les régions qui séparent les électrons ne

(1) Nomenclature qui n'est pas en usage.

sont pas à courbure complète et celles qui sont intérieures aux électrons doivent être entièrement exclues de l'espace-temps. Nous ne pouvons pas nous imaginer explorant l'intérieur d'un électron avec tout un attirail de particules mobiles, d'ondes lumineuses, d'horloges matérielles et de règles divisées ; par suite, tant que nous n'aurons pas de nouvelle définition, toute géométrie de l'intérieur de l'électron et tout état relatif à cet espace-temps intérieur n'auront aucun sens pour nous. Mais ce qui importe dans la pratique habituelle ainsi que dans de nombreuses questions de physique, ce n'est pas la structure *microscopique* de la matière. Ce que nous avons besoin de connaître ce ne sont pas les valeurs réelles des g en un point, c'est leur valeur moyenne dans toute une région, petite au point de vue ordinaire, mais de grande étendue par rapport à la structure moléculaire de la matière. Cette théorie *macroscopique* revient à substituer à la structure granulaire de la matière, une structure continue, à remplacer un espace-temps sans courbure mais parsemé de lacunes par un espace-temps équivalent à courbure complète et sans lacunes.

Il est naturel de penser que nos sens ont dû se développer de manière à percevoir quelques-unes des propriétés intrinsèques caractéristiques des états de l'Univers qui nous entoure, et je préfère regarder la matière et l'énergie non pas comme des facteurs produisant les différents degrés de courbure de l'Univers, mais comme des éléments de notre perception de cette courbure.

Nous verrons que la loi de gravitation peut se résumer en cet énoncé : dans toute région vide, l'espace-temps n'est courbe qu'au premier degré.

CHAPITRE VI

La nouvelle loi de gravitation et l'ancienne.

I don't know what I may seem to the world, but, as to myself, I seem to have been only as a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me [1].

Sir Isaac Newton.

Avait-on quelque raison de ne pas se montrer satisfait de l'ancienne loi de gravitation de Newton ?

Au point de vue observation, elle a fait l'objet des expériences les plus rigoureuses à la suite desquelles on en est venu à la regarder comme le modèle parfait d'une loi exacte de la nature. Les cas où l'on pouvait alléguer qu'elle se trouvait en échec étaient pour ainsi dire inexistants. Il y avait bien certaines irrégularités dans le mouvement de la Lune, mais les astronomes regardaient généralement — et doivent encore regarder aujourd'hui — dans d'autres directions pour chercher la cause de ces écarts. Un seul échec a pu conduire à mettre la loi en doute ; c'était son désaccord avec le mouvement du périhélie de Mercure. L'écart était si petit que pour le corriger on proposa de remplacer le *carré* de la distance par la puissance 2,000 000 16 de celle-ci. Plus tard, il parut possible, sinon vraisemblable, que la matière qui cause la lumière zodiacale avait une masse suffisante pour être regardée comme responsable de la perturbation observée.

[1] Je ne sais ce que je puis paraître au monde, mais, pour moi, il me semble que je ne suis qu'un enfant qui joue sur le rivage, m'amusant à trouver de temps en temps un caillou mieux poli ou un coquillage plus beau que d'ordinaire, pendant que le grand océan de la vérité reste toujours inexploré devant moi.

L'objection la plus sérieuse que l'on a pu faire à la loi de Newton en tant que loi exacte, c'est qu'elle était devenue ambiguë. La loi fait intervenir le produit des masses de deux corps ; or la masse d'un corps dépend de sa vitesse — fait inconnu au temps de Newton. Devons-nous prendre la masse variable, ou la masse au repos ? Peut-être un juge averti interprétant l'énoncé de Newton comme il le ferait d'une dernière volonté ou d'un testament, pourrait-il trancher cette question ; mais on ne peut pas dire que ce soit là un moyen d'éclaircir un point important dans une théorie scientifique.

Et la *distance* qui intervient aussi dans la loi, n'est-ce pas quelque chose de relatif à un observateur déterminé ? Devons-nous prendre pour observateur un être emporté par le Soleil, ou par le deuxième corps considéré, ou bien encore au repos dans l'éther, ou quelque milieu gravitationnel ?

Enfin la force de gravitation se propage-t-elle instantanément, ou avec la vitesse de la lumière, ou encore avec quelque autre vitesse ? Jusqu'à une époque relativement récente on pensait avoir donné des preuves suffisantes pour établir que la vitesse de la gravitation était de beaucoup supérieure à celle de la lumière. La démonstration que l'on donnait était quelque chose

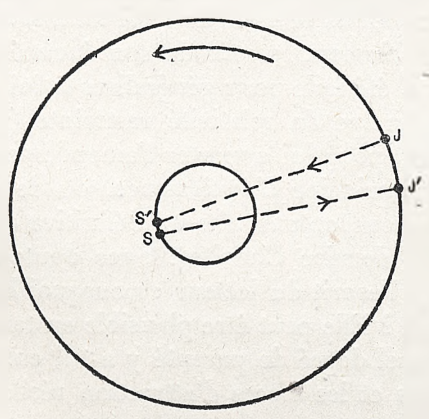


Fig. 13.

comme ceci. Si le Soleil et Jupiter s'attirent respectivement vers leurs positions actuelles S et J, les deux forces d'attraction ont même ligne d'action, sont égales et opposées .Si au contraire ces deux astres s'attirent respectivement vers les positions S' et J'

qu'ils occupaient antérieurement, au moment où cette attraction prit son essor à travers l'espace, les deux forces de gravitation forment alors un couple. Or ce couple aurait tendance à accroître la quantité de mouvement angulaire du système et, ses effets s'ajoutant tous sans cesse les uns aux autres, il devrait rapidement, si l'on suppose la vitesse de la gravitation du même ordre que celle de la lumière, causer un changement dans la durée de révolution de Jupiter, ce qui est en contradiction avec l'observation. Cet argument est fallacieux car ce n'est pas un effet nécessaire de la propagation que S soit attiré vers J'. En fait, si S et J étaient deux charges électriques, on trouverait que S est attiré très approximativement vers J (et non vers J'), bien que l'influence électrique se propage avec la vitesse de la lumière [1]. Dans la théorie que nous exposons dans cet Ouvrage, la gravitation se propage avec la vitesse de la lumière et nulle part on ne rencontre de désaccord avec l'observation.

On prétend souvent que la loi de gravitation de Newton est beaucoup plus simple que la nouvelle loi d'Einstein. Cela dépend essentiellement du point de vue auquel on se place ; du point de vue de l'Univers à quatre dimensions la loi de Newton est de beaucoup la plus compliquée. Nous verrons de plus que pour éclaircir tous les points obscurs de cette loi newtonienne, il faut élargir considérablement le sens de son énoncé.

Des essais ont été faits pour généraliser la loi de Newton sur les bases du principe de relativité restreinte (page 26) seul. C'était insuffisant pour lui apporter l'amendement définitif. En nous servant du principe d'équivalence, ou de la relativité de la force, nous avons obtenu une loi définitive que nous avons énoncée dans le dernier Chapitre. Sans doute cette question s'est-elle posée à l'esprit du lecteur : pourquoi l'appelle-t-on la loi de gravitation ? Elle peut être plausible en tant que loi de la nature ; mais quel degré de parenté y a-t-il entre la courbure de l'espace-temps et les forces d'attraction réelles ou apparentes ?

Il y avait jadis une race de poissons plats qui vivaient dans un océan à deux dimensions. On pouvait remarquer que ces poissons nageaient en général suivant des lignes droites à moins

(1) Appendice. Note 6.

qu'il n'y eût quelque obstacle à leur libre parcours. Cela semblait parfaitement naturel. Mais il y avait une région de cet océan où les poissons qui s'aventuraient semblaient tomber sous l'empire de quelque charme ; les uns, en la traversant, changeaient la direction de leur mouvement, et d'autres y nageaient en rond indéfiniment. Pour expliquer ces singularités un des poissons imagina une théorie tourbillonnaire ; il montra que dans cette région existaient des tourbillons qui faisaient tourner tout ce qui s'y trouvait. Puis on proposa une théorie bien meilleure ; d'après elle, les poissons étaient tous attirés par un poisson énorme — un poisson-soleil — qui dormait au centre de la région ; là était la cause des perturbations apportées à leur mouvement. La théorie aurait pu ne pas tomber juste du premier coup ; mais elle fut confirmée avec une exactitude merveilleuse par tous les genres possibles d'expériences. On trouva que tous les poissons avaient en eux une puissance attractive proportionnelle à leur taille ; la loi d'attraction, bien qu'extrêmement simple, suffisait à expliquer tous les mouvements avec un degré de précision inconnu jusqu'à ce jour dans l'investigation scientifique. Il y eut bien quelques poissons pour se plaindre qu'ils ne voyaient pas comment une pareille action pouvait se communiquer à distance ; mais l'opinion générale était que cette influence se propageait par l'intermédiaire de l'océan et qu'on en comprendrait mieux le mécanisme le jour où l'on en saurait un peu plus sur la nature de l'eau. Par suite tous les poissons, ou presque tous, qui voulaient donner une théorie de cette attraction, commençaient par décrire quelque genre de mécanisme pour sa propagation à travers l'eau.

Mais il vint un poisson qui conçut une tout autre explication. Il avait été frappé par ce fait que ses camarades, qu'ils soient gros ou petits, suivaient toujours les mêmes trajectoires bien que naturellement il y eût une force plus grande pour dévier le plus gros poisson, et il porta toute son attention sur les trajectoires et non sur les forces. Il obtint alors une explication remarquable de tout le système. Il y avait dans l'Univers une colline qui entourait le poisson-soleil ; les poissons ne pouvaient la percevoir directement, n'ayant que deux dimensions. Mais quand un poisson venait à s'aventurer sur l'un des versants de la colline, bien qu'il fît de son mieux pour nager droit, il tour-

nait toujours un peu (un voyageur qui gravit obliquement la pente d'une montagne dont il a le sommet à sa droite doit sciemment appuyer à gauche s'il veut conserver sa direction primitive par rapport à sa boussole) (1). C'était là le secret de cette attraction incompréhensible, ou de cette déviation des trajectoires que l'on subissait dans la région mystérieuse.

Cette comparaison n'est pas parfaite car elle ne fait intervenir la colline que dans l'espace, alors que nous devons compter avec un relief dans l'espace-temps. Elle montre bien néanmoins comment la courbure de l'Univers que nous habitons peut donner l'illusion d'une force attractive, et, en fait, ne peut être mise en évidence que par l'intermédiaire d'un tel effet. Nous allons maintenant voir en détail la solution du problème.

Sous la forme $G_{\mu\nu} = 0$ la loi d'Einstein exprime les conditions qui doivent être satisfaites dans le champ de gravitation produit par une distribution arbitraire quelconque de la matière attirante. Une forme analogue de la loi de Newton avait été donnée par Laplace dans son équation célèbre $\Delta V = 0$. La loi paraît moins obscure quand, au lieu de se demander quels genres d'espace-temps peuvent exister dans une région vide de matière sous les conditions les plus générales, on cherche la nature de cet espace-temps dans la région entourant une particule matérielle prise isolément. Nous traitons à part le cas de la particule isolée, exactement comme le fit Newton. Nous pouvons de plus apporter une grosse simplification dans le problème en choisissant des coordonnées particulières qui, bien entendu, ne doivent pas être d'un type incompatible avec le genre d'espace-temps trouvé.

Nous n'avons besoin de considérer que l'espace à deux dimensions — suffisant pour l'orbite soi-disant plane d'une planète — le temps étant ajouté comme troisième dimension. On peut

(1) La signification géométrique de ce fait est facile à concevoir. Pour ne pas dévier, le voyageur devrait suivre la ligne d'intersection de la surface supposée convexe par le plan vertical qui contient sa direction primitive. Il est au contraire tenté de suivre la ligne de plus court chemin c'est-à-dire la géodésique tangente à sa direction primitive. Le plan osculateur à une géodésique étant, comme on sait, normal à la surface, la géodésique s'écarte du plan vertical du côté où la surface monte. Il faut donc appuyer du côté opposé pour rester dans le plan vertical.

toujours, si on le veut, faire intervenir la troisième dimension de l'espace en tenant compte des conditions de symétrie. On trouve par de longs calculs (1) que, autour d'une particule :

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma}dr^2 - r^2 d\theta^2 + \gamma dt^2 \qquad (6)$$

où $\gamma = 1 - \frac{2m}{r}$.

La quantité m est la masse grativationnelle de la particule — mais nous ne sommes pas supposés le savoir encore. r et θ sont des coordonnées polaires, le système de coordonnées étant celui de la Fig. 11 ; plus exactement ce sont les quantités les plus rapprochées des coordonnées polaires que l'on puisse rencontrer dans un espace qui n'est pas rigoureusement euclidien.

En fait, cette expression du ds^2, on la trouve en premier lieu simplement comme une solution particulière des équations du champ de gravitation d'Einstein ; elle traduit l'existence d'une variété de collines (il semble que ce soit la plus simple) dont la courbure ne dépasse pas le premier degré. *Il se pourrait* qu'il y eût quelque région de l'Univers où l'on trouvât un pareil état comme effet de conditions spéciales. Pour déterminer ces conditions nous allons suivre et étudier quelques-unes des conséquences que l'on peut tirer d'un pareil cas, chercher comment se meut une particule matérielle dans une telle région et voir si nous ne connaissons aucun cas où l'observation puisse nous faire retrouver ces conséquences. Ce n'est qu'après que nous nous serons assurés que cette forme du ds^2 correspond bien aux plus importants des effets observés attribuables à une particule matérielle de masse m située à l'origine, que nous serons en droit d'identifier cette solution particulière avec celle que nous cherchions.

Nous aurons un exemple suffisant d'un pareil type de raisonnement, en indiquant comment doit se distribuer la matière pour conduire à cette solution particulière. En tout point où la loi (6) est valable, il ne peut y avoir de matière, car la loi qui s'applique à un espace vide est vérifiée. Mais, si nous essayons d'approcher de l'origine ($r = 0$), un phénomène curieux se présente. Supposons que nous prenions une règle graduée

(1) Appendice. Note 7.

et que, la disposant radialement, nous l'utilisions pour tracer des longueurs égales suivant un rayon en nous rapprochant au fur et à mesure de l'origine. Le temps t restant constant et $d\theta$ étant nul pour des mesures radiales, la formule (6) se réduit à :

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma}\,dr^2,$$

$$\text{ou}\quad dr^2 = -\gamma ds^2.$$

Nous débutons avec r grand et peu à peu nous nous rapprochons du point $r = 2m$. En ce point, d'après la définition, $\gamma = 0$; de sorte que, quelle que soit la grandeur de l'intervalle mesuré ds, $dr = 0$. Nous pouvons continuer à déplacer chaque fois notre règle graduée de sa propre longueur, dr est toujours nul, autrement dit r ne diminue plus. Il y a comme un cercle magique à l'intérieur duquel nulle mesure ne peut nous faire pénétrer. Il est naturel que nous nous fassions une image de ce je ne sais quoi s'opposant à notre approche, et que nous disions qu'une particule de matière occupe l'intérieur de ce cercle.

En réalité, tant que nous supposons l'espace-temps courbé seulement au premier degré, il nous est impossible de donner au sommet de la colline une forme arrondie ; on doit se représenter ce sommet comme rejeté à l'infini et analogue à une cheminée sans fin. Nous pouvons pourtant substituer le dôme à la cheminée si nous recourons à une petite région de courbure plus grande. Ce ne peut être une région vide car la loi relative à un espace vide ne s'applique plus. Aussi disons-nous qu'elle renferme de la matière — ce qui, pratiquement, revient à donner une définition de celle-ci. Cette question peut rappeler à ceux qui connaissent l'hydrodynamique le problème de la rotation irrotationnelle d'un fluide ; les conditions ne peuvent se trouver satisfaites à l'origine des coordonnées et il est nécessaire d'exclure une région occupée par un filet tourbillonnaire.

Nous devons également dire un mot de l'emploi des coordonnées r et t dans (6). Elles correspondent à notre notion ordinaire de la distance radiale et du temps — du moins dans la mesure où l'on peut, pour désigner les coordonnées d'un Univers non euclidien, se servir de termes qui, dans leur signification courante, supposent un Univers euclidien. Nous appel-

lerons donc r et t la distance et le temps. Mais, donner des noms aux coordonnées ne nous en apprend pas plus — et ici, nous en apprend infiniment moins — que l'examen de l'expression du ds^2. Toute question qui porte sur la signification exacte de r et de t doit toujours être traitée en se référant à l'équation (6).

Le défaut de planéité du champ de gravitation est indiqué par l'écart du coefficient γ par rapport à l'unité. Si la masse $m = 0$, $\gamma = 1$ l'espace-temps est parfaitement euclidien. Même dans les champs de gravitation les plus intenses que l'on connaisse, l'écart est extrêmement petit. Pour le Soleil, la quantité m que l'on appelle la masse gravitationnelle n'est que de 1,47 kilomètres [1] ; pour la Terre, elle est de 5 millimètres. Dans tout problème que l'on peut avoir à résoudre pratiquement, le rapport $\frac{2m}{r}$ est excessivement petit. Pourtant, c'est de la petite différence correspondante pour γ que dépend la totalité des phénomènes de gravitation.

Le coefficient γ apparaît en deux endroits dans la formule et modifie par conséquent la planéité de l'espace-temps de deux manières différentes. En règle générale, ces deux manières sont loin d'avoir la même importance et c'est la présence de γ comme coefficient de dt^2 qui produit de beaucoup les effets les plus remarquables. Supposons que nous voulions mesurer l'intervalle entre deux événements de l'histoire d'une planète. Supposons par exemple ces événements à une distance de 1 seconde dans le temps : $dt = 1$ seconde $= 300.000$ km. Donc $dt^2 = 90.000.000.000$ km². Aucune planète ne dépassant la vitesse de 50 km. par seconde, la variation dr associée à la durée de 1 seconde de l'histoire de la planète, ne pourra excéder 50 km. et dr^2 ne pourra être supérieur à 2.500 km². Il est clair maintenant que le terme très petit $\frac{2m}{r}$ a plus de chances de se faire sentir quand on le multiplie par dt^2 que quand on le multiplie par dr^2.

Par conséquent, dans une première approximation, nous pourrons négliger l'écart par rapport à l'unité du coefficient de dr^2 et écrire :

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2. \qquad (7)$$

[1] Appendice. Note 8.

Nous allons montrer maintenant que toute particule située dans ce genre d'espace-temps doit paraître soumise à une influence attractive provenant de l'origine.

Envisageons le problème qui consiste à représenter sur un plan une région restreinte de ce type d'Univers, à faire la « carte » de cette région.

Il est d'abord essentiel de définir avec soin la distinction que nous faisons ici entre une « image » et une « carte ». Si nous nous donnons les latitudes et longitudes d'un certain nombre de points de la Terre, nous pouvons déterminer une image de la portion de surface terrestre correspondante en regardant les latitudes et les longitudes comme les abcisses et les ordonnées d'un système de coordonnées planes rectangulaires de sorte que méridiens et parallèles forment un réseau de carrés ; mais ce n'est pas là une carte véritable. Dans une carte habituelle de l'Europe les méridiens sont obliques et les parallèles sont courbes. Pourquoi cela ? Parce qu'une carte a pour but de figurer aussi exactement que possible les distances avec leurs proportions véritables (1). La distance est ce qu'il importe de représenter aussi correctement que possible. Si l'on passe au cas de quatre dimensions, l'intervalle étant l'analogue de la distance, une carte de l'Univers à quatre dimensions doit reproduire tous les intervalles avec leurs proportions véritables. Pour construire une *image* naturelle de l'espace-temps, on regarde les r et les t comme des distances horizontales et verticales sur le plan de la figure ; c'est le procédé utilisé quand on fait par exemple le graphique du mouvement d'une particule ; mais dans une vraie *carte* reproduisant les intervalles avec leurs proportions respectives, les lignes des r et des t sont des courbes inclinées les unes sur les autres.

Pour tracer les méridiens et les parallèles sur une carte il faut se conformer à la formule de la page 98 :

$$ds^2 = d\beta^2 + \cos^2 \beta d\lambda^2.$$

de même pour figurer les lignes des r et des t on doit se reporter à la formule (7).

(1) C'est généralement le but que l'on se propose d'atteindre bien qu'il existe des cartes non conformes à cette règle : par exemple, la carte de Mercator.

La Fig. 14 nous montre une telle carte. Il est facile de voir pourquoi les lignes des t convergent vers la gauche de la figure. Le facteur $1-\frac{2m}{r}$ décroît à mesure qu'on s'éloigne vers la gauche car r diminue ; par suite toute variation de t correspond à un intervalle de plus en plus court et doit être représenté sur la carte par des distances de plus en plus courtes quand on va vers la gauche. Il est moins simple de voir pourquoi les lignes des r ont les formes figurées ; par analogie avec la latitude et

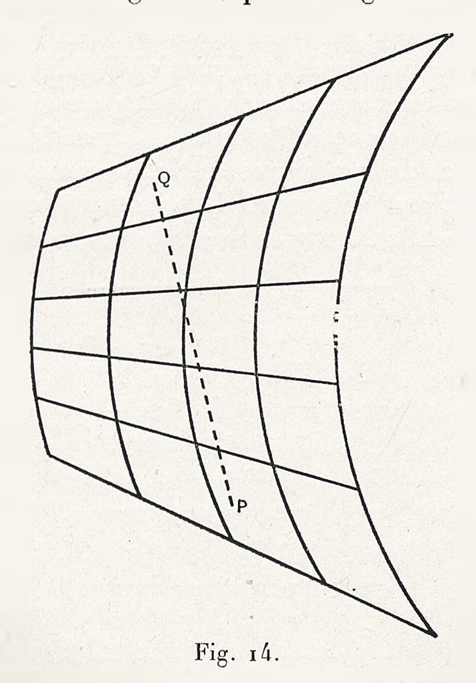


Fig. 14.

la longitude nous pourrions nous attendre à les voir courbées dans le sens inverse. Mais nous avons examiné au Chapitre III la relation qui existe entre la direction de l'axe des temps et une direction d'espace conjuguée ; il est visible que la carte nous donne approximativement les divisions en losanges de la Fig. 6 (1).

(1) La substitution $x=r+\frac{mt^2}{2r^2}$, $y=t\left(1-\frac{m}{r}\right)$ donne $ds^2=-dx^2+dy^2$ en supposant qu'on puisse négliger le carré de m. Pour tracer la carte on prend alors x et y comme coordonnées rectangulaires.

Comme toutes les cartes de surfaces courbes, le diagramme n'est précis qu'à la limite quand l'aire représentée devient infiniment petite.

Il importe de bien saisir la signification de cette carte. Quand on parle habituellement de la distance au Soleil, et du temps en un certain point du système solaire, on entend les deux variables r et t. Elles ne désignent pas les résultats de mesures précises faites avec des règles divisées et des horloges au point considéré, mais ce sont les variables dont le choix convient le mieux à la description du système solaire entier. Elles sont l'expression d'un compromis car on est toujours obligé de considérer une région trop étendue pour pouvoir faire de cette région une représentation exacte sur une carte plane. Pour en faire une image, il est tout naturel de regarder ces variables comme des coordonnées rectangulaires partageant l'espace-temps en mailles carrées comme dans la Fig. 15 ; une telle image ne doit pas être

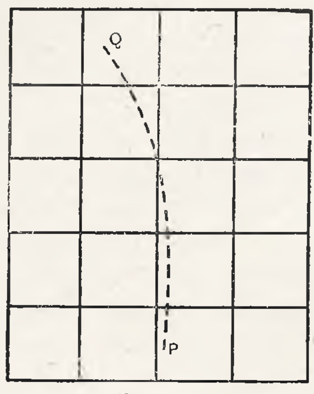


Fig. 15.

confondue avec une carte car elle ne reproduit pas les intervalles avec leurs proportions véritables. Il est impossible de tracer une carte fidèle et sans distorsion d'une région courbe tout entière ; seule une portion suffisamment petite de cette région peut être reproduite sans déformation si la division suivant r et t est faite comme dans la Fig. 14. Pour revenir d'une carte véritable à l'image habituelle où r et t figurent un espace et un temps rectangulaires, on déformera la Fig. 14 jusqu'à ce que ses mailles deviennent des carrés comme dans la Fig. 15.

Sur la carte de la Fig. 14 la géométrie est euclidienne et les trajectoires des particules matérielles seront des droites. Soit PQ une trajectoire qui est nécessairement presque verticale à moins que la vitesse ne soit très grande. Déformons la figure de manière à obtenir la représentation ordinaire des r et des t de la Fig. 15 ; la trajectoire PQ s'incurvera, sa concavité étant dirigée vers la gauche où se trouve le Soleil. A chaque déplacement vertical d'une unité le long de l'axe des t correspond un déplacement horizontal d'espace vers la gauche de plus en plus grand ; la vitesse vers le Soleil augmente donc progressivement. C'est ce que l'on traduit en disant que la particule est attirée par le Soleil.

Le lecteur habitué aux spéculations mathématiques ne trouvera aucune difficulté à établir d'après le diagramme que pour une particule animée d'une vitesse assez petite, l'accélération dirigée vers le Soleil est approximativement $\frac{m}{r^2}$ ce qui concorde avec la loi de Newton.

Les trajectoires dans le cas des grandes vitesses peuvent être modifiées d'une manière un peu différente. La ligne d'Univers correspondant à une onde lumineuse est représentée par une droite inclinée à 45° sur l'horizontale de la Fig. 14. Il faudrait une très grande précision dans l'exécution du dessin pour qu'on puisse voir ce qui arrive dans la déformation qui amène la Fig. 14 à coïncider avec la Fig. 15 ; en réalité, la trajectoire en même temps qu'elle se rapproche de la verticale, s'incurve et c'est sa convexité qui est orientée vers la gauche. L'effet de la gravitation du Soleil sur une onde lumineuse, ou sur une particule ayant une vitesse du même ordre qui se déplace le long d'une droite passant par le Soleil, est en réalité une *répulsion !*

La trajectoire d'une onde lumineuse transversale, émanant du plan du diagramme, sera modifiée comme l'était celle d'une particule de vitesse nulle dans la déformation permettant de passer de la Fig. 14 à la Fig. 15. Par suite l'action exercée par le Soleil sur une onde lumineuse transversale est toujours une attraction. L'accélération est simplement $\frac{m}{r^2}$ comme dans le cas d'une particule au repos (1).

(1) C'est là un résultat que l'on déduit de la formule (7) qui n'est qu'ap-

Il est extrêmement important que l'expression trouvée pour traduire la nature géométrique du champ de gravitation d'une particule, conduise à la loi de l'attraction de Newton. Cela nous montre que la loi $G_{\mu\nu} = 0$ fondée sur la théorie concorde avec l'expérience, du moins aproximativement. C'est loin d'être pour nous un désavantage que la loi de Newton ne soit applicable que dans le cas des petites vitesses ; toutes les vitesses planétaires sont petites en comparaison de celle de la lumière et les considérations exposées au début de ce chapitre ne nous font penser à la nécessité de quelque modification de la loi que dans le cas de vitesses du même ordre que celle de la lumière.

Un autre point important à signaler c'est que l'attraction de gravitation n'est qu'une déformation géométrique des trajectoires rectilignes. Peu importe la nature du corps ou de la perturbation qui suivent cette trajectoire, sa déformation est due uniquement à la différence qui existe entre l' « image mentale » et la « carte véritable » de la portion d'espace-temps considérée. Par suite, lumière et matière ont leurs trajectoires également modifiées. Cette proposition est d'ailleurs implicitement contenue dans le principe d'équivalence ; si, en effet, il n'en était pas ainsi, des propriétés optiques nous permettraient de faire une distinction entre l'accélération d'un ascenseur et un accroissement véritable de la pesanteur ; dans ce cas, l'observateur particulier qui verrait les particules lumineuses suivre des trajectoires rectilignes pourrait être défini comme « non accéléré » d'une manière absolue et il ne pourrait y avoir de théorie de la relativité. Les physiciens, en général, avaient été préparés à admettre la vraisemblance d'effets de la gravitation sur la lumière semblables à ceux exercés sur la matière, et ils s'étaient souvent posé ce problème : la lumière a-t-elle ou non un « poids » ?

La présence de γ en tant que coefficient de dt^2 est la cause des caractères essentiels de la gravitation newtonienne ; sa présence sous la forme $\frac{1}{\gamma}$ comme coefficient de dr^2 est responsable des principaux écarts de la nouvelle loi par rapport à l'ancienne. Cette distinction paraît correcte ; mais la loi de Newton est

proximative. Nous verrons plus loin que la formule exacte (6) modifie ce résultat.

ambiguë et il est malaisé de dire exactement ce que l'on doit regarder comme des écarts par rapport à elle. Mettons de côté, maintenant que nous l'avons suffisamment examiné, le terme de temps et ne considérons plus que le terme d'espace (1) :

$$ds^2 = \frac{1}{\gamma} dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Cette formule montre que l'espace considéré seul n'est pas euclidien dans le voisinage d'une particule attirante .C'est là un fait qui sort complètement du domaine de l'ancienne loi. Le temps ne peut être exploré que par quelque chose de mobile, une particule matérielle libre, ou les différents organes d'une horloge, de sorte que le caractère non euclidien de l'espace-temps peut être dissimulé par l'introduction d'une fiction commode : un champ de force, modifiant convenablement le mouvement. L'espace, au contraire, peut être exploré à l'aide de méthodes statiques ; et, théoriquement, son caractère non euclidien pourrait être établi par des mesures suffisamment précises faites avec des règles divisées rigides.

Si nous disposons notre règle transversalement pour mesurer la longueur d'une circonférence dont nous désignerons le rayon par r, la longueur mesurée ds est, d'après la formule, égale à $rd\theta$; quand la circonférence se trouve décrite tout entière l'angle θ s'est accru de 2π ; la mesure de la longueur de la circonférence est donc $2\pi r$. Si au contraire nous disposons notre règle le long d'un rayon, la longueur mesurée ds est égale à $\frac{dr}{\sqrt{\gamma}}$, quantité toujours supérieure à dr. En mesurant la longueur d'un diamètre, nous trouvons donc un résultat plus grand que $2r$ puisque chaque élément de notre mesure est plus grand que la variation correspondante de r.

Par conséquent, si nous traçons une circonférence, que nous placions près de son centre une particule matérielle de manière à produire un champ de gravitation et que nous mesurions avec une règle divisée la circonférence et le diamètre, le rapport de la mesure de la première à la mesure du second n'est pas le

(1) Nous changeons le signe de ds^2, de sorte que ds, quand il est réel, a la signification d'une mesure d'espace au lieu d'avoir celle d'une mesure de temps.

fameux nombre $\pi = 3,14159265358979323846264338327 9....$ mais un nombre légèrement inférieur. Sous une autre forme, si nous inscrivons dans cette circonférence un hexagone régulier, ses côtés ne seront pas rigoureusement égaux au rayon de la circonférence. En plaçant la particule près du centre et non au centre lui-même, nous évitons de la traverser pour mesurer le diamètre, ce qui fait de l'expérience une expérience pratique ; mais, si pareille expérience est possible pratiquement on ne peut songer à l'utiliser pour déterminer le caractère non euclidien de l'espace, car on ne peut atteindre le degré de précision nécessaire à cette détermination. Si la masse d'une tonne se trouvait placée à l'intérieur d'un cercle de 5 mètres de rayon, le nombre π ne commencerait à être en défaut qu'à la vingt-quatrième ou à la vingt-cinquième décimale.

Ce qui fait la valeur de ce mode d'exposition du résultat, c'est qu'il nous montre que le relativiste ne parle pas du tout en métaphysicien quand il affirme que l'espace d'un champ de gravitation est non euclidien. Cette proposition a une signification purement physique et nous saurons peut-être un jour la confirmer expérimentalement. Mais nous pouvons, en attendant, montrer son exactitude par des méthodes indirectes.

Supposons-nous en présence d'un champ plat, uniformément parsemé de haies. La distance de deux points quelconques de ce champ sera proportionnelle au nombre des haies par dessus lesquelles il faudra sauter pour aller d'un des points à l'autre en suivant une ligne droite — en fait le nombre minimum des haies. Nous pouvons regarder ces nombres comme équivalents aux distances et nous en servir pour faire la carte du terrain. Cette carte peut être dessinée sur une feuille plane de papier et nous ne rencontrerons nulle part le moindre désaccord entre le modèle et le dessin car le terrain est plan lui-même. Ecartons maintenant de notre pensée toute idée de distance dans le champ ou de ligne droite tracée sur lui ; admettons qu'une distance entre deux points sur la carte ne représente autre chose que le nombre minimum des haies situées entre ces deux points ; la droite les joignant sur la carte représentera par conséquent la route à suivre pour aller de l'un à l'autre sur le terrain. Cette convention a l'avantage que s'il arrive un tremblement de terre qui vienne déformer le sol de notre champ, notre carte sera

encore correcte. Un chemin de minimum de haies croisera les mêmes haies qu'avant le tremblement de terre ; mais ce chemin, par suite du bouleversement ne sera plus une ligne droite et il fera des détours. Nous n'aurions aucun avantage à prendre une route plus droite car nous serions conduits à traverser une région où les haies seraient plus serrées et plus rapprochées les unes des autres. Nous ne modifions pas le nombre des haies qui sont sur le parcours d'un certain chemin en déformant celui-ci.

C'est ce que l'on peut montrer sur les Fig. 14 et 15. La Fig. 14 représente un champ primitivement non déformé avec des haies uniformément espacées (non représentées sur la figure). La droite PQ figure le chemin de minimum de haies pour aller de P à Q ; sa longueur est proportionnelle au nombre de haies qui sont sur son parcours. La Fig. 15 représente le terrain après sa déformation, PQ étant devenu une certaine courbe ; néanmoins PQ est encore un chemin de minimum de haies de P à Q et le nombre des haies rencontrées est le même que précédemment. Par suite si nous faisons le plan du terrain déformé en ne raisonnant que sur ces nombres, nous trouvons la Fig. 14 exactement comme si aucune déformation n'avait eu lieu.

Il faut déraciner les haies et les replanter ailleurs si l'on veut modifier leur nombre d'une manière quelconque. Partant d'un certain point, supposons que nous les disposions de manière qu'elles soient de plus en plus clairsemées au fur et à mesure que nous nous éloignons du point considéré. Choisissons maintenant un cercle ayant ce point pour centre. Mais, tout d'abord qu'est-ce qu'un cercle ? Nous devons le définir au moyen de nos haies ; ce sera évidemment une courbe telle que le nombre minimum des haies qui se trouvent entre un de ses points et le centre soit constant (cette constante étant le rayon). Armés de cette définition, nous pouvons défier les tremblements de terre ! Le nombre des haies que l'on rencontrera en décrivant la circonférence d'un pareil cercle, ne sera pas avec le nombre des haies situées sur un rayon dans le même rapport que dans le cas de leur distribution uniforme ; étant donnée la distribution plus dense autour du centre, ce rapport sera plus petit. Nous avons donc là une analogie remarquable avec un cercle dont la circonférence est moindre que π fois son diamètre.

Cette analogie nous permet de faire l'image de l'état de l'espace environnant une particule matérielle et dans lequel le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est moindre que π. Les nombres de haies ne pourront plus servir à construire une carte exacte sur une feuille de papier, car ils ne sont pas conformes à la géométrie euclidienne.

Supposons maintenant qu'une particule pesante veuille traverser ce champ en passant tout près du centre mais non pas au centre même. Dans un espace euclidien où les haies sont distribuées uniformément, sa trajectoire serait une ligne droite ; autrement dit, pour aller d'un point à un autre, la particule emprunterait le trajet comprenant le minimum d'obstacles. Nous pouvons admettre que, dans un champ non euclidien avec des haies distribuées d'une manière arbitraire, elle suivra le chemin qui lui demandera le moindre effort. En fait, dans une région suffisamment petite, on ne peut faire aucune distinction entre la distribution arbitraire et une déformation ; nous pouvons donc imaginer que la particule se comporte dans chacune des régions successives qu'elle rencontre en suivant la règle du minimum d'obstacles et qu'elle ne s'inquiète pas de la distribution arbitraire qui n'est visible que dans un coup d'œil d'ensemble du champ entier [1].

Dans le cas actuel, elle s'arrangera évidemment de manière à ne pas traverser en ligne droite la partie où les haies se trouvent accumulées, mais à suivre un chemin légèrement extérieur où elles sont un peu plus clairsemées — pas trop extérieur car ce chemin se trouverait allongé d'une manière exagérée. La trajectoire de la particule sera donc légèrement concave vers le centre et pourtant un observateur ne manquerait pas de dire que ce même centre l'attire. Il est assez curieux d'appeler cela une attraction quand la trajectoire a l'air, au contraire, d'éviter la région centrale ; mais il est clair que la direction du mouvement a subi une déviation qui n'est attribuable qu'à une force attractive.

Cette courbure de la trajectoire vient s'ajouter à celle dûe à

[1] Il doit exister quelque trajectoire absolue et, si l'on ne peut associer sa signification absolue qu'à des nombres de haies et non à des distances dans le champ, la trajectoire du minimum de haies est la seule susceptible d'une définition absolue.

la force newtonienne de gravitation qui dépend du deuxième aspect de γ dans la formule. Comme nous l'avons déjà montré, c'est en général un effet beaucoup plus petit qui ne se présente que comme une correction extrêmement petite apportée à la loi de Newton. Le seul cas où ces deux effets ont même importance, est celui d'une onde lumineuse ou d'une particule se mouvant avec une vitesse de l'ordre de celle de la lumière ; alors dr^2 devient du même ordre de grandeur que dt^2.

En résumé, un rayon lumineux passant au voisinage d'une particule matérielle s'infléchira pour deux raisons : d'abord par suite du caractère non euclidien de la combinaison du temps avec l'espace ; la courbure correspondante du rayon est équivalente à celle due à la gravitation newtonienne et peut se calculer par la méthode ordinaire en supposant la lumière pesante comme un corps matériel ; — en second lieu, par suite du caractère non euclidien de l'espace pris isolément, d'où il résulte une courbure qui vient s'ajouter à celle prédite par la loi de Newton. Si donc nous pouvons observer la valeur de la déviation d'un rayon lumineux passant au voisinage d'une masse pesante, nous pourrons par là-même faire une expérience décisive qui nous permettra de savoir si c'est à la théorie d'Einstein ou à celle de Newton qu'obéit la lumière.

Cette séparation de l'attraction en deux parties, utile dans une comparaison de la nouvelle loi avec l'ancienne, est, au point de vue de la relativité, purement artificielle. Ce que nous constatons c'est que le rayon lumineux est dévié exactement comme le serait la trajectoire d'une particule matérielle se déplaçant avec la même vitesse. La cause de cette courbure peut être attribuée soit au poids de la lumière, soit au caractère non euclidien de l'espace-temps, suivant la nomenclature adoptée. La seule différence entre les prédictions de l'ancienne et de la nouvelle théorie c'est que dans un cas le poids est calculé suivant la loi de gravitation de Newton et dans l'autre suivant celle d'Einstein.

On peut exposer d'une autre façon l'effet de la gravitation sur la lumière tel que l'entend Einstein, et ce nouveau mode d'exposition, pour plusieurs raisons, est bien préférable. Il est fondé sur ce fait que la vitesse de la lumière dans un champ de gravitation n'est plus une constante (l'unité) mais diminue à mesure

que l'on se rapproche du corps attirant. Cela ne veut pas dire qu'un observateur déterminant expérimentalement la vitesse de la lumière en un point près du Soleil constaterait l'existence de cette diminution ; si cet observateur fait l'expérience de Fizeau son résultat en kilomètres par seconde sera rigoureusement le même que s'il était sur la Terre. C'est à la vitesse *coordonnée* que notre proposition s'applique, c'est-à-dire à celle qui, fonction des quantités r θ t, est introduite par un être qui observerait au même instant le système solaire tout entier.

On doit se souvenir que dans la discussion de la géométrie approchée de l'espace-temps dans la Fig. 3, nous avions trouvé que certains événements, dont P, étaient dans le passé ou le futur absolus de O et que d'autres, tels que P' n'étaient ni avant, ni après O mais seulement ailleurs. Analytiquement ce qui fait la distinction c'est que pour l'intervalle OP ds^2 est positif alors que pour OP' il est négatif. Dans le premier cas l'intervalle est réel ou « dans le temps », dans le deuxième cas il est imaginaire ou « dans l'espace ». Les deux régions sont séparées par des lignes (plus exactement des cônes) qui, chaque fois qu'on les traverse, font changer de signe ds^2 ; le long de ces lignes, ds est nul. Il est évident que la signification absolue de ces lignes doit avoir une grande importance dans la géométrie de l'Univers. Physiquement, leur caractère essentiel, c'est qu'elles sont les lignes d'Univers des perturbations lumineuses et que le mouvement d'une telle perturbation est toujours donné par l'équation $ds=0$.

En nous servant de l'expression du ds^2 dans un champ de gravitation, nous avons donc pour la lumière:

$$0=-\frac{1}{\gamma}\,dr^2-r^2d\theta^2+\gamma dt^2.$$

Pour une propagation radiale $d\theta=0$ et

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\gamma^2.$$

Pour une propagation transversale $dr=0$,

$$\left(\frac{rd\theta}{dt}\right)^2=\gamma.$$

La vitesse coordonnée de la lumière se déplaçant radialement

est donc γ ; celle de la lumière se déplaçant transversalement est $\sqrt{\gamma}$, dans le système de coordonnées choisi.

La vitesse coordonnée dépendant du choix des coordonnées, il est possible et préférable de prendre un système légèrement différent dans lequel la vitesse de la lumière sera la même dans toutes les directions (¹), par exemple γ ou $1-\frac{2m}{r}$. Cette vitesse diminue donc à mesure que l'on se rapproche du Soleil — c'est un exemple de la remarque faite plus haut qu'une perturbation lumineuse se propageant suivant une direction centrale est repoussée par le Soleil.

On peut comparer le mouvement ondulatoire de la lumière à une succession de longues vagues droites roulant à la surface de la mer. Si le mouvement des vagues est plus lent à l'une de leurs extrémités qu'à l'autre, le front de la vague peu à peu exécutera comme un mouvement de conversion et sa direction de propagation primitive se modifiera également. En mer ce cas se présente chaque fois que l'une des extrémités de la vague atteint avant l'autre une région où l'eau est peu profonde, car la vitesse dans une eau peu profonde se trouve diminuée. Tout le monde sait que là se trouve la cause du changement de direction de ces vagues qui s'avancent en biais dans un golfe et qui pivotent pour devenir parallèles au rivage ; l'extrémité la plus avancée de la vague est retardée par l'eau moins profonde du golfe et attend l'autre extrémité. Il en est de même quand les ondes lumineuses viennent à passer près du Soleil ; c'est leur extrémité la plus proche de l'astre qui a la vitesse la plus petite et le front de l'onde pivote ; la direction de propagation des ondes se trouve par suite déviée.

La lumière se meut plus lentement dans un milieu matériel

(¹) C'est ce que l'on obtient en écrivant $r+m$ au lieu de r, c'est-à-dire en diminuant de 1 km. 5 ce qu'il est convenu d'appeler la distance au Soleil ; ce changement de coordonnées simplifie le problème mais peut, bien entendu, ne créer aucune modification dans nos observations. Une fois trouvé le chemin suivi par la lumière dans le système de coordonnées choisi, nous avons à faire correspondre les résultats aux mesures expérimentales en utilisant la formule du ds^2 qui s'y rapporte. Cette correspondance finale des résultats mathématiques et expérimentaux est cependant relativement simple car elle porte sur des mesures faites dans un observatoire terrestre où les écarts de γ par rapport à l'unité sont négligeables.

que dans le vide, sa vitesse étant inversement proportionnelle à l'indice de réfraction du milieu. Le phénomène de la réfraction est en réalité causé par un ralentissement du front de l'onde à son passage dans une région de vitesse moindre. Nous pouvons donc reproduire exactement l'effet de la gravitation sur la lumière en imaginant l'espace entourant le Soleil rempli d'un milieu réfringent qui donne en chaque point une vitesse convenable à la lumière. Pour lui donner la vitesse $1-\frac{2m}{r}$, son indice de réfraction doit être $\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}$ ou approximativement $1+\frac{2m}{r}$. A la surface du Soleil $r=697.000$ km., $m=1,47$ km., l'indice de réfraction doit donc être 1,000 004 24. A une hauteur au-dessus du Soleil égale à son rayon l'indice est 1,000 002 12.

Tout problème relatif à des rayons lumineux passant près du Soleil peut être résolu par les méthodes de l'optique géométrique appliquées à ce milieu d'indice de réfraction équivalent. Il est aisé de montrer que la déviation totale du rayon lumineux passant à une distance r du centre du Soleil est (en radians) :

$$\frac{4m}{r},$$

tandis que cette déviation calculée d'après la méthode de Newton serait :

$$\frac{2m}{r}.$$

Pour un rayon rasant la surface du Soleil la valeur numérique de cette déviation serait :

1",75 (théorie d'Einstein),
0",87 (théorie de Newton).

CHAPITRE VII

La lumière pesante.

Query I. — Do not Bodies act upon Light at a distance, and by their action bend its Rays, and is not his action (*caeteris paribus*) strongest at the least distance ? (1).

Newton, *Optics*.

Nous en arrivons à la preuve expérimentale de l'action de la gravitation sur la lumière, que nous avons déduite théoriquement dans le dernier chapitre. Ce n'est pas l'objet de ce livre d'entrer dans des détails d'expériences, et pour continuer ce que nous avons fait jusqu'ici, nous devrions résumer en quelques lignes seulement les résultats des observations faites. Pourtant c'est cette expérience qui a attiré l'attention publique sur la théorie de la relativité et il semble que le désir de la bien connaître soit assez répandu. Aussi raconterons-nous avec quelque détail les expéditions qui furent faites pour observer l'éclipse. Cela nous reposera du reste des longues dissertations théoriques, et nous donnera un exemple des application importantes de la théorie aux observations pratiques.

Nous ne devons pas perdre de vue qu'il y avait deux questions auxquelles il fallait répondre : d'abord, la lumière est-elle pesante (comme le pensait Newton) ou est-elle indifférente à la gravitation ? Ensuite, si elle a un poids, la grandeur de sa déviation est-elle conforme à la loi de Newton ou à celle d'Einstein ?

On savait déjà que la lumière avait une masse, ou une inertie comme toutes les autres formes d'énergie électromagnétique,

(1) Première question. — Les corps n'agissent-ils pas à distance sur la lumière ? Cette action ne dévie-t-elle pas ses rayons ? Et (*caeteris paribus*) n'est-elle pas d'autant plus forte que la distance est moindre ?

et c'est ce que confirmaient les phénomènes relatifs à la pression de radiation. Il faut une certaine force pour arrêter un faisceau lumineux en plaçant un obstacle sur son passage ; un projecteur en action est soumis à une légère force de recul comme un canon tirant des projectiles matériels. La force, prédite par la théorie électromagnétique, est excessivement petite mais elle existe et des expériences délicates ont pu la mettre en évidence. Sans doute cette inertie de radiation a-t-elle une importance considérable dans les phénomènes cosmiques, et joue-t-elle un rôle capital dans l'équilibre des nébuleuses les plus diffuses. C'est peut-être l'agent qui a découpé la matière cosmique en étoiles de masses grossièrement uniformes. Il est possible que la queue des comètes soit une preuve de la puissance impulsive de la lumière solaire qui chasse vers l'extérieur les particules les plus ténues ou les plus absorbantes.

Il est aussi légitime de parler d'un poids de la lumière que du poids de n'importe quelle autre substance. La masse des quantités ordinaires de lumière est cependant extrêmement petite et j'ai déjà calculé qu'au prix modéré de 0 fr. 10 par kilowatt-heure, une Compagnie de Lumière Electrique devrait vendre sa lumière au taux de 2.500.000.000 fr. le kg. ! Et il tombe chaque jour sur la Terre 160 tonnes de lumière solaire !

Il n'est pas commode de se représenter comment une vibration peut avoir de l'inertie et il est encore moins aisé de saisir ce que l'on entend par le poids d'une onde. Peut-être comprendrons-nous mieux si nous mettons le problème sous une forme moins abstraite. Imaginons un corps creux et supposons qu'un rayonnement calorifique ou lumineux traverse la cavité ; la masse du corps sera la somme des masses de la matière et de l'énergie rayonnante contenue dans la cavité ; les ondes lumineuses qu'il renferme augmenteront la force nécessaire pour le mettre en mouvement. Pesons-le maintenant avec une balance ou un dynamomètre. Son poids sera-t-il également plus grand par suite de l'énergie rayonnante qu'il contient, ou bien ne sera-t-il que le poids de la matière seule ? Dans le premier cas, la lumière aura évidemment un poids propre et il n'est pas difficile de trouver les conséquences de cette propriété relatives à la marche d'un faisceau lumineux ayant toute liberté pour se propager, au lieu de rester prisonnier dans une cavité.

L'effet de la pesanteur sur les radiations contenues dans le corps creux sera de leur faire acquérir à chaque instant une quantité de mouvement dirigée vers le bas, proportionnelle à leur masse et qui se transmettra à la longue à la matière du corps. Pour une onde lumineuse libre dans l'espace, cette quantité de mouvement supplémentaire vient s'ajouter à la quantité de mouvement primitive et la quantité résultante déterminera la direction du rayon ; celui-ci, par suite, s'infléchira. La théorie de Newton ne nous suggère rien sur la cause de cette déviation ; elle se contente de la prédire comme conséquence des principes généraux. La théorie d'Einstein nous en fournit au contraire une explication en établissant l'existence d'une variation de vitesse des ondes.

On a toujours trouvé jusqu'ici que la masse et le poids étaient associés suivant une loi de stricte proportionnalité. Il existe une preuve extrêmement importante qui nous montre que cette proportionnalité ne se limite pas à la forme matérielle de l'énergie. L'uranium, en effet, contient une quantité considérable d'énergie radio-active qu'il libère lentement. La masse de l'énergie doit être une fraction appréciable de la masse totale de la substance. Or il a été prouvé par des expériences faites avec la balance de torsion d'Eötwös que le rapport du poids à la masse pour l'uranium est le même que pour toutes les autres substances ; l'énergie radio-active est donc pesante. Pourtant cette expérience ne fait intervenir que de l'énergie électro-magnétique liée et rien ne nous autorise à en déduire les propriétés de l'énergie lumineuse libre.

Il est facile de voir qu'une expérience faite sur la Terre n'a actuellement aucune chance de réussir. Si la masse et le poids de la lumière sont dans le même rapport que pour la matière, un rayon lumineux sera courbé exactement comme la trajectoire d'une particule matérielle. Sur la Terre, une balle de fusil, comme toute autre chose d'ailleurs, tombe de 5 mètres dans la première seconde, 20 dans les deux premières, et ainsi de suite, par rapport à sa ligne de tir primitive ; le canon du fusil doit donc être dirigé au-dessus du but. La lumière devrait également tomber de 5 mètres dans la première seconde [1] ; mais

[1] Ou 10 mètres suivant la théorie d'Einstein, la vitesse de chute croissant avec celle du mouvement.

comme pendant ce temps elle a parcouru 300.000 km. la déviation est inappréciable. En fait tous nos parcours terrestres sont décrits si rapidement que c'est à peine si la gravitation a le temps d'avoir quelque effet.

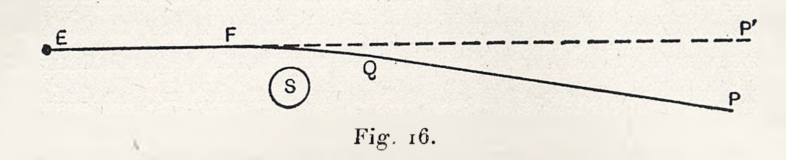


Fig. 16.

Aussi transportons-nous le terrain de l'expérience dans le voisinage du Soleil. Nous y avons une action de la gravitation 27 fois plus intense que sur la Terre ; et — ce qui est beaucoup plus important — les grandes dimensions du Soleil permettent de donner à la lumière une trajectoire bien plus longue dans la région où la gravitation peut avoir une influence notable. La déviation peut alors prendre une valeur de l'ordre de la seconde, ce qui, pour l'astronome, est une quantité très sensible.

Sur la Fig. 16 la ligne EFQP représente un rayon lumineux provenant d'une étoile éloignée P, et qui aboutit à la Terre. La partie du rayon où celui-ci s'incurve le plus se trouve dans le voisinage immédiat du Soleil, tandis que les portions initiale PQ et finale FE sont pratiquement droites. Comme le faisceau lumineux entre dans l'œil ou dans le télescope de l'observateur suivant FE, c'est aussi dans cette direction que semblera se trouver l'étoile. Mais pour la Terre, sa direction vraie est QP orientation initiale du faisceau lumineux. L'étoile paraît donc déplacée de sa position véritable vers l'extérieur du Soleil d'un angle égal à la déviation totale de la lumière.

Il faut remarquer que ceci n'est vrai que parce que l'étoile est si éloignée que sa direction vraie par rapport à la Terre E est confondue avec sa direction par rapport au point Q. Pour une source lumineuse faisant partie du système solaire le déplacement angulaire apparent de la source n'est plus du tout égal à la déviation des rayons lumineux. Il peut sembler assez curieux que l'attraction de la lumière par la masse solaire soit la cause d'un déplacement apparent de l'étoile, qui paraisse l'éloigner du Soleil ; mais c'est un fait dont on comprend aisément la raison.

Cette déviation de la lumière n'existe que pour les étoiles que l'on voit près du Soleil ; par suite, la seule chance que nous ayons de faire cette observation, c'est de profiter d'une éclipse totale, quand la Lune fait obstacle à l'éblouissante clarté. Même à ce moment-là, la couronne solaire émet une lumière assez intense qui s'étend sur une grande largeur tout autour du disque obscur de la Lune. Une première condition est donc qu'il y ait près du Soleil des étoiles brillantes qui ne soient pas éteintes par la lueur coronale. De plus, les déplacements de ces étoiles ne peuvent être mesurés que par rapport à d'autres astres, autant que possible plus éloignés du Soleil afin que leur déplacement soit moindre ; il nous faut donc un nombre raisonnable d'étoiles brillantes angulairement distantes du Soleil pour servir de points de référence.

Au temps où l'homme était en proie à la superstition, un philosophe étudiant la nature, avant d'entreprendre quelque expérience importante, aurait consulté un astrologue pour savoir si l'heure était favorable à ses projets. De nos jours, pour des raisons plus sérieuses, un astronome après avoir interrogé le ciel, ne manquerait pas de dire que le jour de l'année le plus favorable pour peser la lumière est à coup sûr le 29 Mai. La raison en est que le Soleil dans son voyage annuel sur l'écliptique traverse des champs stellaires plus ou moins riches et que le 29 Mai il est en plein milieu d'un amas tout-à-fait exceptionnel d'étoiles brillantes — une partie de l'amas des Hyades — de beaucoup le champ stellaire le plus remarquable parmi tous ceux que rencontre le Soleil. D'autre part, si notre problème avait été posé à une autre époque de l'histoire, il aurait pu falloir attendre des milliers d'années avant qu'une éclipse totale de Soleil se décidât à tomber au jour propice. Bonne fortune singulière, il advint une telle éclipse le 29 Mai 1919. Etant donné l'ordre curieux dans lequel les éclipses se succèdent, une occasion semblable se présentera de nouveau en 1938 ; nous sommes en plein dans le cycle le plus favorable. Nous ne voulons pas dire qu'il serait impossible de faire l'expérience pendant d'autres éclipses, mais fatalement le travail serait plus difficile.

L'attention fut attirée sur cette opportunité remarquable par l' « Astronomer Royal » en Mars 1917 ; des préparatifs pour

faire les observations furent entrepris par une commission de la « Royal Society » et par la « Royal Astronomical Society ». Deux missions devaient être envoyées en des endroits différents de la ligne de totalité de l'éclipse afin de diminuer les chances d'échec dues au mauvais temps. Le Dr A.-C.-D. Crommelin et Mr. C. Davidson se rendraient à Sobral au nord du Brésil ; Mr. E.-T. Cottingham et l'auteur de cet Ouvrage à l'île du Prince dans le Golfe de Guinée. L'équipement scientifique des deux expéditions fut préparé à l'observatoire de Greenwich, par les soins de l' « Astronomer Royal » ; c'est là que Mr. Davidson opéra les réglages qui furent le facteur essentiel de la réussite de ces deux tentatives.

Les deux expéditions s'étant faites dans des conditions quelque peu différentes, il est assez difficile de les décrire ensemble. Nous allons d'abord voir ce qu'il advint aux observateurs de l'île du Prince. Ils avaient un télescope de 3 m. 45 de distance focale. Sur les photographies qu'ils obtenaient, 1 seconde d'arc (ce qui était à peu de chose près l'angle de déplacement le plus grand à mesurer) correspondait à environ $\frac{1}{60}$ mm., quantité parfaitement appréciable. L'ouverture de l'objectif était de 33 cm. mais on le diaphragmait à 20 cm. pour obtenir des images plus nettes. Il est nécessaire, même pour une pose de quelques secondes à peine, de tenir compte du mouvement diurne des étoiles à travers le ciel et de donner au télescope le mouvement convenable pour qu'il puisse les suivre. Mais, comme il est difficile d'exécuter un tel montage d'un long et lourd télescope pour une installation qui n'est que temporaire et dans une région lointaine du globe, le procédé habituel auquel on a recours pour le cas des éclipses consiste à immobiliser le télescope et à lui renvoyer le faisceau lumineux provenant des astres que l'on veut observer, à l'aide d'un cœlostat — miroir plan assujetti à tourner autour d'un certain axe avec une vitesse convenable qui lui est communiquée par un mouvement d'horlogerie. Ce fut le procédé qu'on utilisa dans les deux missions.

Les observateurs avaient un peu plus d'un mois sur leur île pour faire leurs préparatifs. Le jour de l'éclipse le temps n'était pas favorable. Quand la phase de totalité débuta, le disque noir de la Lune avec son auréole lumineuse, n'était visible qu'à

travers un nuage, à peu près comme pendant ces nuits où l'on ne voit aucune étoile et où la Lune se montre voilée par les nuages. Il n'y avait rien d'autre à faire qu'à mettre à exécution le programme préparé et à espérer que tout se passerait pour le mieux. L'un des observateurs avait pour fonctions de changer les plaques photographiques et de les faire se succéder rapidement, pendant qu'un autre donnait les durées de pose nécessaires à l'aide d'un écran que l'on déplaçait en avant de l'objectif pour éviter toute secousse du télescope.

For in and out, above, about, below
'Tis nothing but a magic Shadow-show
Played in a Box whose candle is the Sun
Round which we Phantom Figures come and go [1].

Notre « boîte d'ombres » prend toute notre attention. Il y a là-haut un spectacle féerique et, comme le montrèrent plus tard les photographies, la flamme splendide d'une protubérance gigantesque se balance à près de 50.000 lieues au-dessus de la surface solaire. Nous n'avions, hélas, pas le temps d'y jeter un coup d'œil ! Nous sommes tout juste conscients du demi-jour sinistre qui baigne le paysage et du silence de la nature rompu seulement par les appels des observateurs et les battements du métronome qui nous marquent les 302 secondes de la totalité.

Seize photographies ont été obtenues dont les durées de pose variaient de 2 à 20 secondes. Les premières ne montrèrent aucune étoile mais la protubérance remarquable s'y trouvait dessinée ; puis, sans doute, les nuages se dissipèrent un peu vers la fin de la totalité car quelques étoiles apparurent sur les dernières plaques. Sur la plupart des clichés c'était l'une ou l'autre des étoiles les plus importantes qui manquait, cachée par les nuages, et ces clichés ne pouvaient être d'aucune utilité ; mais il y en eut une où l'on voyait les images bien nettes de cinq étoiles qui convenaient parfaitement à la détermination cherchée.

(1) Dedans et dehors, au-dessus, autour, au-dessous
Ce n'est qu'une pièce magique d'ombres chinoises
Jouée dans une boîte où la chandelle est le Soleil
Et autour de laquelle, personnages fantômes, nous allons et venons.

Cette mesure fut faite sur le lieu-même de l'expérience quelques jours après l'éclipse à l'aide d'une machine à diviser à vis micrométrique. Le problème était de déterminer de combien le champ de gravitation du Soleil écartait les positions apparentes des étoiles par rapport à leurs positions normales connues d'après les photographies prises en l'absence du Soleil. Ces photographies normales avaient été prises avec le même télescope au mois de Janvier, en Angleterre. Le cliché pris pendant l'éclipse et le cliché de comparaison étaient placés, les deux pellicules impressionnées l'une contre l'autre, sous la machine à diviser, de telle sorte que les images correspondantes de chaque étoile tombaient l'une à côté de l'autre [1] ; les petites distances qui les séparaient étaient mesurées selon deux directions rectangulaires. De ces déterminations on pouvait déduire les déplacements relatifs des étoiles. Dans la comparaison des deux plaques, il fallait tenir compte de la réfraction, de l'aberration, de l'orientation de la plaque, etc... mais comme ce sont des facteurs qui interviennent également dans les déterminations de parallaxes pour lesquelles on exige une précision bien plus grande, je n'insisterai pas sur les méthodes de correction car elles sont bien connues des astronomes.

Les résultats que l'on put tirer de cette photographie donnèrent un déplacement angulaire bien déterminé qui concordait d'une manière satisfaisante avec la théorie d'Einstein mais qui n'était pas conforme à la prédiction de Newton. Bien que les documents eussent été maigres en comparaison de ceux que l'on aurait pu espérer, l'auteur (qui, il faut bien l'admettre, n'était pas parfaitement impartial) pensa que c'était un résultat convaincant.

Ce ne fut qu'une fois de retour en Angleterre que nous eûmes une confirmation des résultats trouvés. Quatre plaques non développées avaient été rapportées, car elles étaient d'une composition qui n'aurait pas supporté un développement dans un climat chaud. L'une d'elles nous montra suffisamment d'étoiles pour rendre les mesures possibles et, venant ainsi confirmer les

[1] C'était chose possible car, à l'île du Prince, le champ stellaire était renversé par sa réflexion dans le miroir du cœlostat alors qu'en Angleterre la photographie était prise directement.

indications de la première plaque, elle donna pour résultat celui que prédisait Einstein.

La bête noire des erreurs systématiques possibles intervient dans toutes les expériences de ce genre. Comment pouvez-vous savoir s'il n'y a pas dans votre appareil quelque cause que l'on puisse rendre responsable du déplacement apparent ? Votre objectif a été secoué pendant le voyage ; vous avez introduit un miroir dans votre système optique ; peut-être les 30° de température qui séparent le climat équatorial de l'hiver en Angleterre sont-ils la cause de quelque erreur ? Pour nous mettre à l'abri de ces critiques, nous avions photographié de nuit un champ stellaire différent du champ étudié pendant l'éclipse mais ayant la même altitude que celui-ci, à l'île du Prince et en Angleterre. Si la déviation avait tenu réellement à l'instrument, les étoiles, sur ces plaques, auraient montré des déplacements relatifs semblables à ceux que présentaient les photographies prises pendant l'éclipse. Mais les mesures faites sur ces plaques de contrôle ne révélèrent aucun déplacement appréciable. Cela semble donc établir d'une manière satisfaisante que le déplacement observé pendant l'éclipse est bien dû à l'action du Soleil et non à des différences dans les conditions expérimentales des observations faites à l'île du Prince et en Angleterre. En réalité il reste encore une porte de sortie ; c'est cette différence qui provient de ce fait que les plaques de contrôle furent prises la nuit dans l'île du Prince tandis que les photographies de l'éclipse furent prises de jour, ou plutôt dans le demi-jour de l'éclipse. Une telle objection paraît ne pas devoir tenir car la température à l'île du Prince ne varie pas de plus de 1° du jour à la nuit.

Ainsi, le problème semblait résolu et ne presque plus laisser de prise au doute ; c'était donc avec confiance que nous attendions le retour de la mission du Brésil. Cette expédition avait eu un temps superbe et avait réuni sur ses plaques des éléments d'information bien plus importants que les nôtres. Ses membres étaient restés deux mois après l'éclipse pour photographier la même région du ciel avant l'aurore, quand elle fut débarrassée de la présence du Soleil, afin de pouvoir comparer des photographies prises exactement dans les mêmes conditions. Un groupe de clichés fut obtenu avec un télescope semblable à

celui que nous avions utilisé à l'île du Prince. La mission avait en plus un télescope plus long, de 10 cm. d'ouverture et de 5 m. 80 de distance focale [1]. On eut une désillusion avec les photographies fournies par le premier instrument. Bien qu'il y eût toutes les étoiles que l'on comptait trouver (environ 12) et que l'on eût pris de nombreux clichés, les images se trouvèrent gâtées, sans doute par suite de la déformation du miroir du cœlostat sous l'effet de la chaleur solaire qui le frappait. Les observateurs étaient pessimistes quant à la valeur de leurs photographies ; mais, à leur retour en Angleterre, ce furent ces photographies que l'on étudia les premières et les résultats de cette étude, qui venaient après ceux de l'île du Prince causèrent une surprise générale. Les mesures, avec un accord trop parfait, révélèrent une « déviation moitié », c'est-à-dire la valeur newtonienne qui est la moitié de la valeur einsteinienne. Il semblait difficile qu'on pût opposer les pauvres éléments qu'avait fournis l'île du Prince à la riche moisson de données qu'on avait tirée du ciel sans nuages de Sobral. Il est vrai que les images de Sobral avaient une tare qui les condamnait, mais cette tare ne paraissait pas suffisante pour infirmer les témoignages qu'elles apportaient ; de plus les images de l'île du Prince avaient contre elles qu'elles n'étaient pas d'une netteté irréprochable et qu'elles étaient affaiblies par la présence des nuages. Pourtant ces dernières présentaient des avantages que l'on sut mieux apprécier plus tard. Leur point fort, c'était la garantie qu'apportaient les photographies du champ stellaire de contrôle contre l'erreur systématique ; à Sobral, de telles photographies de contrôle n'avaient pas été faites ; et, puisqu'il était évident que la discordance des deux résultats dépendait d'une erreur systématique et non de la plus ou moins grande richesse des matériaux, ceci fit donner sans contestation la préférence aux résultats de l'île du Prince. En outre, les rayons solaires n'avaient pas pu, à l'île du Prince, avoir d'effets fâcheux sur le miroir du cœlostat, pour la bonne raison que le Soleil, trop timide, s'était retiré derrière

[1] Voir la photographie en tête du Livre. On y voit les deux télescopes et les parties postérieures des deux cœlostats qui servaient à renvoyer dans les télescopes les faisceaux lumineux provenant du ciel. Le mouvement d'horlogerie entraînant le plus grand des deux miroirs, est visible sur son piédestal, à la gauche de la gravure.

le rideau de nuages. Un autre avantage des clichés de contrôle de l'île, c'est qu'ils permirent une détermination indépendante de la différence des grossissements du télescope dans son emploi en Angleterre et pendant l'éclipse. Pour les photographies de Sobral, cette différence des grossissements avait été éliminée par la méthode de réduction mais il s'ensuivait que la valeur des résultats dépendait de la mesure d'un déplacement relatif beaucoup plus petit.

Il restait une série de sept plaques prises à Sobral avec l'objectif de 10 cm. ; leur étude avait été retardée par suite d'une modification qu'on dut apporter à la vis micrométrique qui devait les supporter, modification nécessitée par leur grandeur exceptionnelle. Dès l'étude de la première d'entre elles, il parut indubitable que c'était cette série de photographies qui devait fournir le résultat décisif ; les images étaient, en effet, presque idéales, et le grossissement était plus considérable que pour les autres clichés. L'emploi de cet instrument dut présenter de très grosses difficultés — longueur encombrante et peu maniable du télescope ; lenteur plus grande de l'objectif exigeant des durées d'exposition plus longues et une régularité parfaite dans le mouvement d'horlogerie entraînant le miroir ; un foyer rendu plus sensible aux perturbations par la valeur élevée du grossissement — mais les observateurs obtinrent un succès complet et la perfection des négatifs dépassa tout ce qu'on aurait pu espérer.

Ces plaques furent étudiées et donnèrent un verdict final confirmant définitivement la valeur de la déviation prédite par Einstein, en parfait accord avec les résultats obtenus à l'île du Prince.

La théorie d'Einstein prévoyait, rappelons-le, un déplacement angulaire de 1'',74 au bord du Soleil [1], cette valeur diminuant en raison inverse de la distance du faisceau lumineux considéré, au centre du Soleil. La valeur de Newton, moitié de la précédente est 0'',87. Les résultats obtenus en fin de compte (après réduction au bord du Soleil) à Sobral et à l'île du Prince étaient, avec leur erreur probable accidentelle :

Sobral : 1'',98 ± 0'',12 ;
Ile du Prince : 1'',61 ± 0'',30.

[1] La déviation lumineuse prévue de l'infini à l'infini était légèrement supérieure à 1''745, celle de l'infini à la Terre légèrement inférieure.

On a l'habitude de tolérer une marge de sécurité d'environ deux fois l'erreur probable de part et d'autre de la moyenne. Par suite, le témoignage apporté par les clichés de l'île du Prince est presque suffisant pour permettre de rejeter la possibilité de la « déviation moitié » et c'est avec ce degré de certitude pratique que les photographies de Sobral l'excluent entièrement. Les données obtenues à l'île du Prince ont une valeur qui ne peut être estimée à plus du dixième de celle des observations faites à Sobral ; néanmoins elles contribuent à rendre moins aisées les critiques adressées à cette confirmation de la théorie d'Einstein puisque ces deux groupes d'éléments furent obtenus indépendamment, avec des instruments différents, en des lieux différents, et avec des contrôles de natures différentes.

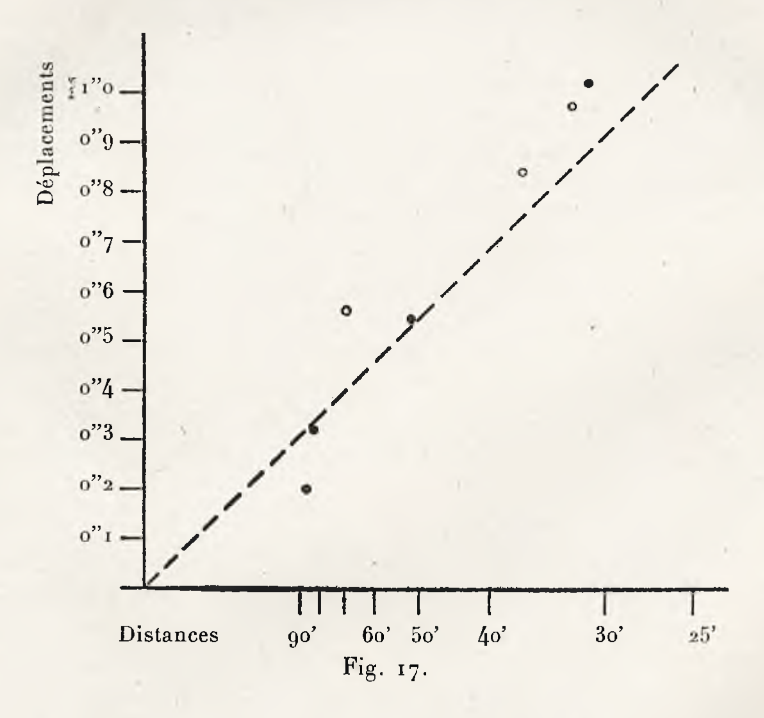


Fig. 17.

La garantie la plus sûre des résultats obtenus avec l'objectif de 10 cm. à Sobral, c'est l'accord frappant que présentèrent entre elles les mesures faites sur différentes étoiles. La déviation théorique devait varier en raison inverse de la distance au centre du Soleil ; si donc nous portons en ordonnée le déplacement

radial moyen de chacune des étoiles et en abcisse l'inverse de la distance normale de chacune d'elles au centre du Soleil, nous aurons des points qui devront se trouver sur une ligne droite. C'est ce que montre la Fig. 17, où la ligne en traits discontinus traduit la prédiction théorique d'Einstein ; les écarts des différents points à cette ligne représentent les erreurs accidentelles de détermination. Une ligne ayant une inclinaison deux fois moindre sur l'axe des abcisses et correspondant à la demi-déviation de Newton serait évidemment inadmissible.

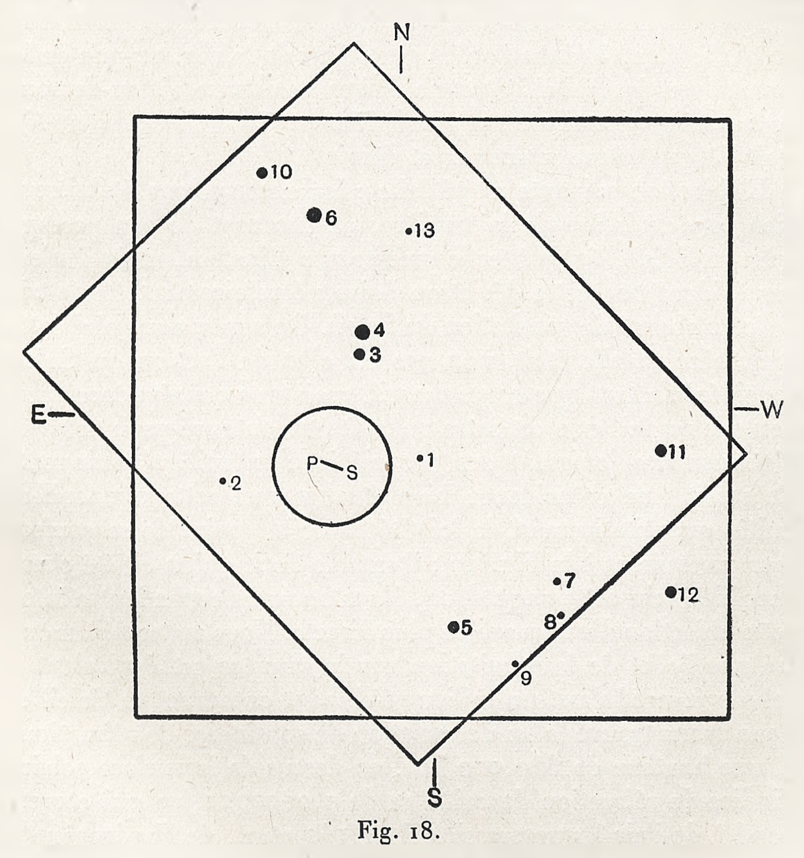


Fig. 18.

De plus, les valeurs de la déviation avaient été déduites des mesures de l'ascension droite et de celles de la déclinaison, déductions faites indépendamment l'une de l'autre ; et ces deux groupes de valeurs concordaient étroitement.

Un diagramme donnant les positions relatives des étoiles est représenté par la Fig. 18.

Le carré figure les bords des plaques utilisées à l'île du Prince, et le rectangle oblique, les bords de celles obtenues à Sobral avec l'objectif de 10 cm. Le centre du Soleil se déplaçait de S en P pendant la durée de 2 h. 1/4 qui séparait les deux phases de totalité aux deux stations. Le Soleil est représenté sur le diagramme pour un instant situé à peu près au milieu de cette durée. Les étoiles qui furent étudiées sur les plaques de l'île du Prince sont numérotées 3, 4, 5, 6, 10, 11 ; celles de Sobral, 11, 10, 6, 5, 4, 2, 3 (dans l'ordre des points de la Fig. 17 pris de la gauche vers la droite). Aucune d'elles ne descendait au-dessous de la sixième grandeur ; la plus brillante, κ^1 du Taureau (n° 4), était de quatrième grandeur et demie.

L'objection suivante a été faite : les observations établissent bien une déviation de la lumière, au moment de son passage près du Soleil, égale à celle prédite par Einstein, mais il n'est pas évident que cette déviation doive nécessairement être attribuée au champ de gravitation du Soleil. On a même suggéré cette hypothèse qu'elle était, non pas un effet de l'action du Soleil considéré en tant que corps massif, mais une conséquence accidentelle du fait que cet astre pouvait être entouré par une sorte d'atmosphère jouissant des propriétés d'un milieu réfringent. Ce serait une coïncidence bien étrange que cette atmosphère imitât quantitativement la loi théorique au point de se conformer exactement à la Fig. 17 ; il semble donc qu'on ait été chercher bien loin cette suggestion. Nous pouvons cependant réfuter cette objection d'une manière plus directe. Nous avons déjà montré que l'effet de la gravitation sur la lumière est équivalent à celui que produirait un milieu réfringent entourant le Soleil et nous avons trouvé la loi de variation de son indice de réfraction. A une hauteur de 640.000 km. au-dessus de la surface solaire l'indice de réfraction devrait être de 1,0000021, ce qui correspond à de l'air à une pression de 1/140 atm., de l'hydrogène à 1/70 atm., de l'hélium à 1/20 atm. Il semble évident qu'il ne puisse y avoir de la matière avec cet ordre de densité à une pareille distance du Soleil. La pression sur la surface solaire d'une telle couche de matière serait de l'ordre de 10.000 atm. et l'étude spectroscopique du Soleil rejette absolument la pré-

sence d'une telle pression. Viendrait-on à affirmer que cette masse pourrait par exemple se trouver soutenue par des forces électriques, nous n'aurions qu'à recourir à un argument encore plus puissant que le précédent et tiré du phénomène de l'absorption. La lumière provenant des étoiles photographiées pendant l'éclipse aurait dû traverser une couche de matière de cet ordre de densité et d'une épaisseur de plus de 1 million de kilomètres — ou plutôt l'équivalent de 16.000 km. d'air à la pression atmosphérique normale. Nous savons à nos dépens quels sont les effets d'absorption de l'atmosphère terrestre qui elle, pourtant, n'est équivalente qu'à une couche d'air homogène de 8 km. d'épaisseur. Or, les étoiles étudiées pendant l'éclipse apparurent sur les photographies avec leur éclat normal. Si notre critique irréductible vient à soutenir que la matière entourant le Soleil pourrait bien être constituée par quelque nouvel élément ayant des propriétés absolument différentes de celles des corps que nous connaissons, nous pourrons lui répondre que le mécanisme de la réfraction et de l'absorption n'a pourtant pas changé, et qu'il y a une limite à la possibilité d'une réfraction sans une absorption appréciable. En fin de compte, il faudrait s'arranger de façon que la densité décroisse en raison inverse de la distance au centre du Soleil afin d'obtenir la loi précédente pour la variation de l'indice de réfraction.

Il y a eu des comètes qui se sont approchées du Soleil à une distance moindre que celle ici considérée. Si elles avaient eu à traverser une atmosphère ayant la densité nécessaire pour rendre compte de la déviation lumineuse, la résistance qu'elles auraient rencontrée aurait été énorme. Le Dr Crommelin a montré que l'étude de ces comètes permet de fixer une limite supérieure à la densité de cette sorte d'atmosphère et cette limite supérieure rend absolument négligeable l'effet de réfraction.

Ceux qui considèrent la loi d'Einstein comme la conséquence naturelle d'une théorie fondée sur un minimum d'hypothèses trouveront une certaine satisfaction à voir que cette prédiction remarquable a été confirmée quantitativement par une observation qu'aucune cause imprévue ne vint faire échouer.

CHAPITRE VIII

Autres preuves de la Théorie.

The words of Mercury are harsh after the songs of Apollo. [1]

Shakespeare (*Love's Labours Lost*).

Nous avons vu les avantages que présente le mouvement rapide des ondes lumineuses en tant que moyen d'étude des propriétés non euclidiennes de l'espace. Mais nous nous souvenons tous de la vieille fable du lièvre et de la tortue. Les planètes au mouvement paisible ont des qualités que nous ne devons pas dédaigner. L'onde lumineuse explore une région en quelques minutes puis fait le rapport de ce qu'elle a vu ; la planète, au contraire, suit péniblement sa route pendant des siècles et des siècles, revenant toujours dans les mêmes régions ; mais à chaque tour nouveau elle nous fait connaître un peu mieux les propriétés de l'espace et accroît peu à peu notre science.

La loi de Newton nous apprend qu'une planète se meut autour du Soleil en décrivant une ellipse ; si aucune autre planète ne vient apporter de perturbations, cette ellipse est immuable. D'après la loi d'Einstein, la trajectoire, très près d'être une ellipse, est une courbe qui ne se ferme pas tout à fait ; à chaque révolution nouvelle tout se passe comme si la trajectoire se déplaçait légèrement dans le sens du mouvement de la planète. L'orbite est en quelque sorte une ellipse qui tournerait lentement [2].

D'une manière plus précise, la loi d'Einstein nous prédit qu'à chaque révolution l'orbite de la planète doit tourner d'une

(1) Le langage de Mercure est rude après le chant d'Apollon.
(2) Appendice. Note 9.

fraction de tour égale à $\frac{3v^2}{C^2}$, v étant la vitesse de la planète et C celle de la lumière. La Terre ayant une vitesse égale à $\frac{1}{10.000}$ de celle de la lumière, le point de son orbite le plus rapproché du Soleil (périhélie) doit donc chaque année se déplacer de $\frac{3}{100.000.000}$ de tour, c'est-à-dire de 0",038. Inutile de songer à mettre pareil déplacement en évidence, mais rien ne nous empêche de laisser ces rotations annuelles s'accumuler pendant plus d'un siècle. La rotation totale serait alors observable s'il n'y avait ce fait que l'orbite terrestre, presque rigoureusement circulaire, n'a pas de sommets bien définis et que nous ne pouvons dire avec une précision suffisante quelle est son orientation et comment se déplacent ses axes. Il est préférable d'étudier une planète dont la vitesse soit plus grande ; l'effet de rotation de l'orbite se trouve accru non seulement par suite de l'acroissement de v^2, mais aussi parce que les révolutions sont plus fréquentes ; pourtant ce qui importe peut-être le plus c'est que l'orbite planétaire soit franchement elliptique pour faciliter l'observation du mouvement de ses sommets. Or ces deux conditions se trouvent remplies dans le cas de Mercure. C'est la plus rapide des planètes solaires et son orbite tourne de 43" par siècle dans le sens où elle se trouve décrite ; c'est de plus celle des planètes dont l'excentricité est de beaucoup la plus forte.

Depuis longtemps on avait remarqué, sans pouvoir l'expliquer, une rotation de l'orbite de Mercure. Elle avait attiré l'attention de Le Verrier ; ce grand astronome avait prédit l'existence de Neptune d'après les perturbations qu'il avait observées dans le mouvement d'Uranus et il pensait que le mouvement anormal de Mercure devait être dû à une planète intra-mercurielle que par anticipation on avait appelée Vulcain. Mais, bien que les astronomes du monde entier eussent à maintes reprises épié l'apparition de l'astre nouveau, Vulcain ne se montra jamais. Voici à quel point en était arrivée la question quand Einstein découvrit sa loi de gravitation. La rotation séculaire et réellement observée de l'orbite de Mercure était de 574" ; le calcul montrait que les perturbations apportées par toutes les autres planètes connues causaient une rotation totale de 532" par siècle. Restait à expliquer cette différence de 42".

On pouvait à peine compter sur la seconde dans l'évaluation de cette quantité, néanmoins sa valeur dépassait environ trente fois l'erreur accidentelle probable.

Cette grosse différence laissée inexpliquée par la loi de gravitation de Newton confirme *exactement* la théorie d'Einstein qui prédit une rotation séculaire de 43".

La déduction de cette prédiction à partir de la loi d'Einstein ne peut être suivie qu'au moyen de l'analyse mathématique ; nous pouvons cependant remarquer que tout écart si léger soit-il à la loi de l'inverse du carré de la distance est de nature à causer un déplacement direct ou rétrograde des sommets d'une orbite planétaire. Qu'une planète dont la trajectoire n'est pas une circonférence, se meuve de manière à osciller entre deux cercles ayant pour centre le Soleil, voilà qui semble assez naturel ; on aurait peine à concevoir comment elle pourrait faire autrement à moins qu'elle n'ait une vitesse suffisante pour quitter définitivement le système solaire. Seulement, le temps mis par la planète pour osciller d'un cercle à l'autre ne sera pas en général la moitié du temps mis à tourner autour du Soleil. Ce n'est que dans le cas très particulier de la loi de l'inverse du carré de la distance que cette circonstance se produit de sorte que l'orbite se ferme et qu'au bout d'une révolution la planète se retrouve au même point. Je ne pense pas qu'on ait jamais donné une « explication simple » de cette propriété de la loi de l'inverse du carré de la distance, et je crois qu'il est bon de rappeler à ceux qui se plaignent des difficultés qu'ils ont à bien saisir la prédiction d'Einstein au sujet de l'avance du périhélie, que leur embarras réel provient de ce qu'ils n'ont pas encore réussi à rendre ce résultat abstrait de la théorie de Newton assez clair pour le faire comprendre à des gens qui n'y sont pas initiés. Les légères modifications qu'introduit la loi de gravitation d'Einstein viennent déranger cette harmonieuse combinaison de sorte que l'oscillation complète entre les deux cercles extrêmes est un peu plus longue que la durée d'une révolution. Du reste Newton lui-même a donné un exemple simple de cette conséquence d'un léger écart à la loi de l'inverse du carré de la distance.

Il a été reconnu qu'une variation de la masse avec la vitesse pouvait être la cause d'une avance du périhélie, mais la signi-

fication ambiguë de la loi de gravitation de Newton rendit la discussion peu convaincante. Il en résultait de plus un effet trop petit pour rendre compte du mouvement du périhélie de Mercure, l'avance que donnait cette théorie étant de $\frac{1}{2}\frac{v^2}{C^2}$ ou tout au plus de $\frac{v^2}{C^2}$. Seule la théorie d'Einstein donna comme résultat la valeur exacte $\frac{3v^2}{C^2}$.

Lodge a pensé que l'on pouvait en partant de cette hypothèse de la variation de la masse avec la vitesse donner une explication complète du mouvement de l'orbite de Mercure si l'on tenait compte en même temps d'un mouvement absolu du Soleil à travers l'éther, inconnu il est vrai, mais qui tantôt viendrait s'ajouter au mouvement de la planète sur son orbite et tantôt viendrait s'en retrancher. D'une discussion entre ce savant et l'auteur de ce Livre, il ressortit clairement que si le mouvement absolu suffisait à expliquer l'avance du périhélie de Mercure, il devait également donner des effets observables sur les mouvements de Vénus et de la Terre ; or ces effets n'existent pas. On en peut conclure l'alternative suivante : ou bien le mouvement du Soleil à travers l'éther est d'un ordre de petitesse tout à fait improbable, ou bien la loi de gravitation satisfait à la condition de relativité, au sens du principe restreint (page 26) et fait disparaître toute influence d'un mouvement d'entraînement uniforme sur les effets de l'accroissement de la masse avec la vitesse.

Il est malheureusement impossible d'attendre de l'étude des autres planètes une confirmation de la loi de gravitation d'Einstein. Pour Vénus et la Terre, les orbites sont trop près d'être circulaires pour permettre l'observation d'un mouvement de leurs sommets. Nous arrivons donc à Mars dont l'orbite a une excentricité raisonnable mais dont la vitesse est si faible que l'avance calculée n'est que de 1",3 par siècle. Les nombres admis aujourd'hui indiquent une avance observée (qui s'ajoute à l'avance provenant des actions perturbatrices connues) de 5" par siècle ; la correction d'Einstein améliore donc un peu l'accord entre l'observation et la théorie ; cependant, comme les erreurs inévitables d'observation empêchent d'affirmer l'exactitude rigoureuse de cette valeur 5", cette amélioration n'a pas grande importance. Le résultat essentiel, c'est que la théorie

d'Einstein a fait rentrer Mercure dans le rang sans modifier le bon ordre que présentaient déjà les autres planètes.

Nous avons mis à l'épreuve la loi de gravitation d'Einstein dans le cas des mouvements rapides (lumière) et dans celui des mouvements de vitesse modérée (Mercure). Pour les mouvements extrêmement lents, cette loi se réduit à la loi de Newton, et l'accord de cette dernière loi avec l'observation peut être regardé comme une confirmation de la loi d'Einstein. Ces différentes preuves paraissent d'un caractère suffisamment convaincant pour nous donner le droit de considérer cette loi comme solidement établie et de l'énoncer sous la force suivante :

Toute particule matérielle ou toute perturbation lumineuse se meut d'un point à un autre de l'espace-temps de manière à rendre maximum la quantité s mesurée le long de sa ligne d'Univers entre ces deux points, l'élément ds étant donné par l'expression :

$$ds^2 = -\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}dr^2 - r^2d\theta^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2.$$

La précision expérimentale est suffisante pour permettre de vérifier l'exactitude des coefficients jusqu'à l'ordre de $\frac{m}{r}$ dans le coefficient de dr^2 et de $\frac{m^2}{r^2}$ dans le coefficient de dt^2 [1].

Sous cette forme la loi apparaît comme solidement fondée sur l'expérience et c'est à peine si une révision, ou même l'abandon complet des idées d'Einstein pourraient la remettre en question.

Ces preuves expérimentales que l'espace, dans le champ gravitationnel du Soleil, est non euclidien ou courbe ont semblé paradoxales et déconcertantes à ceux qui ne s'étaient pas familiarisés avec la théorie. Elles nous montrent clairement que les objets physiques ou leurs trajectoires se trouvent « gauchis » dans le champ solaire ; mais en résulte-t-il nécessairement que l'espace contenant ces objets est lui-même gauchi. Nous répondrons qu'il n'est pas possible de tracer une distinction entre le gauchissement d'un espace physique et celui des êtres physiques qui définissent cet espace. Si nous nous proposions sim-

(1) Appendice. **Note 10.**

plement d'attirer l'attention sur ces caractères du champ de gravitation à titre de curiosités, il serait bien préférable sans aucun doute d'éviter l'emploi de mots susceptibles de se trouver mal interprétés. Si au contraire, c'est à une représentation complète des propriétés du champ de gravitation que nous voulons parvenir, nous ne pouvons pas renoncer à un vocabulaire adéquat pour la simple raison que certaines personnes tiennent à donner aux mots une signification métaphysique bien évidemment étrangère à la discussion.

Nous en arrivons maintenant à un autre genre de preuve. L'énoncé précédent de la loi de gravitation fait intervenir une quantité s qui, dans les limites de cet énoncé, n'est qu'un intermédiaire mathématique ; mais, dans le cours de notre théorie nous avons identifié s avec la longueur-intervalle, mesurable au moyen de règles divisées et d'horloges ; il est par suite désirable de chercher si cette identification peut être confirmée expérimentalement — si la géométrie des règles divisées et des horloges est la même que la géométrie des particules matérielles mobiles et des perturbations lumineuses.

La question s'est posée de savoir si nous pouvions diviser la théorie actuelle en deux parties. N'est-il pas possible de regarder la loi de gravitation telle qu'elle est énoncée sous la forme précédente comme un fait indépendant prouvé par l'observation, en laissant résolument de côté la question de savoir si s peut ou non être identifié avec la longueur-intervalle ? Cette division est motivée par le désir que nous avons de consolider nos gains en leur enlevant tout caractère de spéculation théorique ; mais peut-être l'est-elle aussi parce que nous voulons nous ménager une porte de sortie afin de pouvoir, le cas échéant, conserver à la géométrie des règles graduées et des horloges — c'est-à-dire à l'espace et au temps de notre perception ordinaire — son caractère euclidien. Si nous refusons à s toute parenté avec la longueur-intervalle, il est inutile de lui donner la signification d'une longueur ; on peut le regarder comme une quantité dynamique analogue à l'Action, et la nouvelle loi de gravitation peut être exprimée selon le modèle traditionnel sans qu'il soit nécessaire d'aller chercher des théories plus ou moins bizarres de l'espace et du temps. Ainsi interprétée, la loi perd peut-être son caractère de nécessité théorique, mais elle reste fermement

établie sur l'observation. Malheureusement, il est impossible de faire une division nette de la théorie comme nous l'avons supposé. Si nous n'avons pas recours à quelque interprétation géométrique de s nos conclusions sur les trajectoires des planètes et des ondes lumineuses ne peuvent être liées aux mesures astronomiques qui servent à les vérifier. On ne peut expérimenter directement sur la ligne d'Univers d'une onde lumineuse, définie au moyen des coordonnées r, θ, t ; les coordonnées ne jouent qu'un rôle d'intermédiaire ; aussi, la mesure du déplacement de l'étoile d'après son image photographique implique-t-elle un retour des coordonnées à la quantité s qui apparaît ici avec la signification d'un intervalle dans la géométrie des horloges et règles rigides.

Ainsi, même du point de vue expérimental, une correspondance au moins grossière de la quantité s que l'on rencontre dans la loi de gravitation, avec l'intervalle de la géométrie des horloges et règles graduées, est un fait essentiel. Nous avons maintenant à examiner si l'exactitude de cette correspondance peut être vérifiée expérimentalement.

Ce paraît être une hypothèse raisonnable de supposer que l'atome vibrant est un type d'horloge idéal. Le début et la fin d'une vibration simple constituent deux événements et l'intervalle ds qui les sépare est une quantité absolue indépendante du genre de système de coordonnées adopté. Cet intervalle doit être déterminé par la nature de l'atome ; des atomes absolument semblables auront donc des vibrations qui mesureront des valeurs égales de l'intervalle absolu ds. Choisissons le système de coordonnées habituel (r, θ, t) pour le système solaire, de sorte que :

$$ds^2 = -\gamma^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 + \gamma dt^2.$$

Considérons un atome en repos momentané en un point quelconque du système solaire ; nous disons *momentané,* car cet atome est soumis à l'accélération que lui communique le champ de gravitation au point où il se trouve. Soit ds l'intervalle correspondant à une vibration ; comme l'atome n'a pas bougé les valeurs correspondantes de dr et de $d\theta$ sont nulles et l'on a :

$$ds^2 = \gamma dt^2.$$

La *durée* d'une vibration dt est donc égale à $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ fois l'*intervalle* ds de cette vibration.

Si nous considérons deux atomes semblables en deux points différents du système solaire, l'intervalle de vibration doit être le même pour les deux ; or la durée d'une vibration est proportionnelle à la racine carrée de l'inverse de la quantité γ qui n'est pas la même pour les deux atomes. Comme :

$$\gamma = 1 - \frac{2m}{r},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = 1 + \frac{m}{r} \quad \text{très approximativement.}$$

Prenons un atome sur la surface du Soleil, un autre absolument semblable dans un de nos laboratoires terrestres. Pour le premier, $1 + \frac{m}{r} = 1{,}000\,002\,12$ et pour le deuxième $1 + \frac{m}{r}$ est pratiquement égal à l'unité. La durée de vibration de l'atome solaire est ainsi plus longue dans le rapport de 1,000 002 12 à l'unité et il se pourrait que l'on puisse par une méthode spectroscopique vérifier expérimentalement ce point.

Il y a un point sur lequel nous devons insister. L'examen spectroscopique se fera dans le laboratoire terrestre ; notre épreuve portera non pas directement sur la période d'un atome solaire, mais sur celle qu'auront à leur arrivée sur terre les ondes qu'il aura émises. Ces ondes transmettront-elles sans la moindre modification la période primitive ? Evidemment oui. Le premier et le deuxième ébranlements lumineux ont à parcourir la même distance r et ce trajet se fait avec la même vitesse $\frac{dr}{dt}$; la vitesse de la lumière dans le système de coordonnées utilisé est en effet $1 - \frac{2m}{r}$ et si cette vitesse dépend de r, elle ne dépend pas du tout de t. La différence dt qui sépare les deux ondes à leur départ du Soleil, les séparera donc encore à leur arrivée sur terre (1).

(1) L'intervalle de vibration ds varie constamment le long du chemin suivi par l'onde allant du Soleil à la Terre ; *du point de vue absolu,* la différence qui sépare la lumière émise par une source solaire de celle qui nous vient d'une source terrestre, a pour cause une modification subie par la lumière solaire au cours de son voyage à travers l'espace-temps non-eucli-

Ainsi dans le laboratoire, la lumière émise par une source solaire aurait une période et une longueur d'onde plus grande (autrement dit elle serait plus rouge) que la source terrestre identique. Dans le bleu de longueur d'onde 4.000 Å, les raies solaires se trouveraient déplacées de 4.000 × 0.000 002 12 =0.008 Å vers l'extrémité rouge du spectre.

Les propriétés d'un champ de force gravitationnel sont semblables à celles d'un champ de force centrifuge ; cela peut donc présenter un certain intérêt de voir comment sont déplacées les raies spectrales d'un atome situé dans un champ de force centrifuge. Imaginons que, pendant que nous tournons avec la Terre, nous observions un atome extrêmement éloigné, momentanément au repos par rapport à nos axes tournants. C'est là un cas exactement équivalent à celui de l'atome solaire ; dans les deux cas l'atome est au repos par rapport au système de coordonnées ; la seule différence c'est que l'un est au repos dans un champ de gravitation et l'autre dans un champ de force centrifuge. La direction de la force dans les deux cas est la même — de la Terre vers l'atome observé. L'atome du champ de force centrifuge doit donc aussi vibrer plus lentement et présenter un déplacement vers le rouge de ses raies spectrales. Il en sera ainsi pourvu que la théorie donnée jusqu'ici soit exacte. Nous pouvons supprimer la force centrifuge en choisissant des axes qui ne tournent pas. Or notre atome éloigné était au repos par rapport aux axes en rotation ; autrement dit, il vibrait tout en se mouvant avec eux. Par rapport à l'observateur lié aux axes fixes, l'atome a donc une vitesse élevée et d'après le Chapitre I, ses vibrations deviennent plus lentes, exactement comme se trouvait ralentie la montre de l'aviateur. Le déplacement des raies spectrales dû au champ de force centrifuge n'est donc qu'un aspect nouveau d'un phénomène que nous avons déjà rencontré.

Le déplacement prévu des raies spectrales solaires par rap-

dien qui se trouve entre le Soleil et la Terre. La quantité *dt* qui diffère pour la lumière solaire et la lumière terrestre n'est qu'un intermédiaire mathématique relatif au système de coordonnées que nous avons plus spécialement adopté ; le fait que cette quantité reste constante au cours de la propagation lumineuse est une propriété inhérente à ce système de coordonnées plutôt qu'à la lumière ou à l'espace-temps.

port aux lignes terrestres correspondantes a été recherché avec soin mais il ne s'est pas révélé de manière certaine.

Pour pouvoir apprécier l'importance de ce résultat expérimental en ce qui concerne la théorie de la relativité, nous devons distinguer entre l'observation effective d'un déplacement différent de celui prévu par la théorie et l'absence certaine de tout déplacement. Ceux qui se sont particulièrement occupés de la question, St-John, Schwarzschild, Evershed, Grebe et Bachem semblent tous d'accord sur ce point que le déplacement observé est, dans tous les cas, moindre que le déplacement prévu par la théorie ; cette théorie ne peut donc en aucun cas se réclamer d'un appui de l'expérience. Mais, pour que nous puissions considérer l'expérience comme effectivement contraire à la théorie, les résultats expérimentaux doivent établir quelque chose de plus. Si par exemple la déviation des raies spectrales s'est montrée égale à 0,004 Å au lieu de 0.008 Å comme le voulait la théorie, la seule conclusion que nous puissions tirer de cette observation c'est qu'il existe certains phénomènes causant un déplacement de ces raies, qui ont leur siège dans l'atmosphère solaire et qui nous sont encore inconnus. Personne ne pourrait se montrer surpris qu'il en fût ainsi et, bien entendu, cette circonstance rendrait notre expérience parfaitement inutile. Le cas reste sensiblement le même si le déplacement observé est de 0,002 Å, pourvu toutefois que cette quantité soit supérieure à la valeur des erreurs accidentelles d'expérience. Si nous supposons qu'il existe quelque cause de déplacement inconnue, nous pouvons admettre qu'elle peut tout aussi bien produire un écart de —0,006 Å qu'un écart de +0,002 Å. Pour cette raison les résultats expérimentaux d'Evershed ne sont nullement contraires à la théorie puisque dans tous les cas ce savant trouve des déplacements inexplicables. St-John donna pour valeur moyenne du déplacement d'une série de lignes qu'il étudia, le nombre 0,0036 Å ; c'est encore un nouvel échec de l'expérience. Le seul résultat vraiment *contraire* à la théorie et qui ne soit pas simplement neutre, c'est une série de mesures que fit St-John sur 17 raies du cyanogène et qu'il regarda comme extrêmement sûres. Ces raies donnèrent un déplacement moyen rigoureusement nul. Si cette observation eût été la seule faite, nous aurions sûrement été portés à conclure que l'expérience

condamnait la théorie d'Einstein et qu'il n'existait aucune cause étrangère nous autorisant à mettre en doute la validité de cette observation. L'auteur n'a aucune qualité pour venir critiquer ces mesures spectroscopiques qui se contredisent mutuellement, mais il a l'impression que les résultats de St-John cités en dernier lieu sont ceux qui ont le plus de poids parmi toutes les recherches faites jusqu'à ce jour (1).

Il semble que nous devons encore réserver notre jugement ; il est peut-être bon néanmoins d'examiner quelle position pourrait prendre la théorie actuelle si cette troisième expérience cruciale venait à se prononcer définitivement contre elle.

Il apparaît clairement qu'il y a quelque chose d'illogique dans l'ordre suivi pour le développement de notre théorie, en raison de ce fait que nous avons dû partir des notions ordinaires d'espace et de temps pour aboutir aux propriétés fondamentales de l'Univers absolu. Nous avons pris pour point de départ la définition de l'intervalle en tant que grandeur mesurée à l'aide d'horloges et de règles divisées et nous avons ensuite adapté cette définition aux lignes d'Univers des particules mobiles. C'est évidemment inverser l'ordre logique. La plus simple de nos horloges est encore un mécanisme compliqué et une règle matérielle est un appareil très complexe. La méthode la meilleure serait d'atteindre la connaissance de l'invariant ds par une exploration de l'espace et du temps faite au moyen de particules mobiles ou d'ébranlements lumineux, plutôt que par des mesures effectuées à l'aide d'horloges et de règles graduées. C'est ainsi que l'observation astronomique a permis d'établir la formule du ds^2 relative au champ de gravitation du Soleil ; partir de là pour déterminer exactement ce que l'on mesure avec une horloge ou une règle, nécessiterait tout d'abord, à ce qu'il semble, une théorie détaillée des mécanismes que comporte cette horloge ou cette règle. Mais nous pouvons prendre

(1) Une note toute récente de Grebe et Bachem (*Zeitschrift für Physik*, 1920, p. 51), publiée pendant que l'édition anglaise de cet Ouvrage était sous presse, relate un cas extrêmement favorable au déplacement d'Einstein et permet de réconcilier les résultats discordants trouvés par la plupart des expérimentateurs. Mais la prudence conseille encore « d'attendre et de voir », et il n'y a rien à modifier à la discussion faite dans le texte.

un raccourci qui paraît légitime en utilisant le principe d'équivalence. Quel que soit le mécanisme de notre horloge, que celle-ci soit bonne ou qu'elle soit mauvaise, les intervalles qu'elle bat doivent être quelque chose d'absolu ; l'horloge ne peut savoir quel genre de système de coordonnées emploie l'observateur ; sa marche absolue ne peut donc être modifiée par une position ou un mouvement qui soient purement relatifs à un système de coordonnées. Par suite, quel que soit l'endroit où elle se trouvera, quelle que soit la manière dont elle se déplacera, pourvu qu'elle n'ait pas à subir de chocs matériels ou l'effet de forces électriques, elle devra sans cesse battre des intervalles égaux comme nous l'avions déjà admis. L'horloge est donc tout indiquée pour la mesure des intervalles, même quand ceux-ci correspondent à la nouvelle définition ; toute conclusion différente de la précédente semble impliquer la sensibilité de l'horloge à quelque système de référence particulier (1).

Trois portes de sortie semblent encore ouvertes pour permettre d'échapper à cette conclusion. Une horloge ne tient évidemment aucun compte du système de coordonnées utilisé. Au contraire la nature de l'espace-temps qui l'entoure peut influer sur elle (2). L'atome terrestre est dans un champ de gravitation assez peu intense pour que l'on puisse considérer l'espace-temps où il se trouve comme euclidien ; l'espace-temps qui entoure l'atome solaire n'est pas euclidien. Il pourrait arriver que ces deux atomes traduisent réellement cette différence absolue des portions d'Univers où ils sont plongés respectivement en ne vibrant pas avec le même intervalle ds — contrairement à l'hypothèse que nous avons faite précédemment. Dans ces conditions, la prédiction du déplacement des raies du spectre solaire n'a plus aucune valeur. Il est cependant extrêmement douteux qu'un atome puisse ainsi déceler la courbure de la

(1) Bien entendu, il reste toujours possible que tel puisse être le cas, si peu vraisemblable soit-il. Le point capital de la théorie de la relativité c'est que (contrairement à l'opinion courante) aucune expérience faite jusqu'à ce jour n'a révélé l'existence d'un système de coordonnées possédant un caractère absolu, et non pas que l'expérience ne nous révélera jamais un pareil système.

(2) Appendice. Note 11.

région d'Univers qu'il occupe car on ne peut s'apercevoir de la courbure d'un espace que si cet espace est suffisamment étendu ; il est vrai qu'un atome n'est pas rigoureusement un point, qu'il a toujours une certaine étendue et il n'est pas impossible que les équations de son mouvement renferment les quantités $B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ qui distinguent un champ de gravitation d'un espace-temps euclidien. Cette explication donne lieu à une objection qui paraît insurmontable, c'est que l'effet de la courbure sur la période de vibration serait presque sûrement représenté par des termes de la forme $\frac{m^2}{r^2}$ tandis que pour rendre compte du résultat négatif trouvé pour le déplacement des raies spectrales il faudrait des termes de la forme $\frac{m}{r}$ c'est-à-dire d'un ordre de grandeur beaucoup plus considérable.

La deuxième possibilité d'échapper à la conclusion atteinte plus haut repose sur le fait que nous pouvons nous demander si un atome au repos sur le Soleil peut être rigoureusement semblable à un atome situé sur la Terre ? Un atome qui tomberait de la Terre vers le Soleil atteindrait une vitesse de 610 km./sec. et ne pourrait conserver le repos que grâce à un martelage systématique dû aux chocs d'autres molécules. N'est-ce pas là une circonstance qui peut entraîner une modification permanente dans les propriétés de l'atome au point de vue de son rôle de garde-temps ? Tout atome étant soumis à des collisions incessantes, il est possible que l'atome solaire ait une période de vibration différente de celle de l'atome terrestre correspondant, par suite de la différence systématique qui en résulte dans l'histoire de ces atomes.

Quels sont les deux événements qui marquent le début et la fin de la vibration d'un atome ? Peut-être cette question nous ouvre-t-elle une troisième porte de sortie pour nous permettre d'échapper à notre conclusion. Si ce sont deux événements absolus tels que les explosions de deux détonateurs, l'intervalle qui les sépare est une quantité bien définie et notre argument est applicable. Mais si, par exemple, la vibration atomique est déterminée par la révolution d'un électron autour d'un noyau positif, elle ne se trouve pas délimitée par deux événements bien précis. Une révolution ne signifie autre chose qu'un retour à une

position antérieurement acquise ; or, nous ne pouvons pas dire quelle était cette position antérieure sans faire usage d'un système de coordonnées quelconque. Rien ne prouve donc qu'il y ait un intervalle absolu correspondant à la vibration d'un atome ; deux événements ne sont séparés par un intervalle absolu que s'ils sont eux-mêmes définis d'une manière absolue.

Il est peu vraisemblable que l'une quelconque de ces trois possibilités soit capable d'annuler le déplacement attendu des raies spectrales. Les incertitudes qu'elles introduisent, autant que nous en pouvons juger, sont en effet d'un ordre de grandeur infiniment moindre. Mais nous devons bien nous dire que cette troisième épreuve à laquelle nous soumettons la théorie d'Einstein implique des considérations bien plus complexes que les deux épreuves plus simples des ondes lumineuses et du mouvement planétaire. Le déplacement des raies de Fraunhofer est, à mon avis, une prévision hautement probable de la théorie et je crois pouvoir prédire que l'expérience finira bien un jour par la confirmer (1), bien que cette conclusion ait encore un caractère hypothétique. Ces incertitudes théoriques sont absolument indépendantes des grandes difficultés pratiques de l'expérience, en particulier de la connaissance exacte des propriétés absorbantes d'un atome placé dans l'atmosphère solaire.

En dehors de ces trois expériences capitales, il semble qu'on ait peu de chances de mettre la théorie à l'épreuve, du moins tant que nos méthodes actuelles ne seront pas considérablement perfectionnées. Il est impossible pratiquement de mesurer la déviation d'un rayon lumineux, due à un corps autre que le Soleil. Une étoile vue au bord du disque de Jupiter subirait une déviation de 0'',017. Or, le centième de seconde d'arc est tout ce que peuvent atteindre les mesures les plus précises faites avec les plus gros télescopes. Si l'on pouvait réaliser l'expérience dans les mêmes conditions que les meilleures mesures de parallaxes, on pourrait observer le déplacement mais on ne pourrait le mesurer avec précision. La lumière provenant de la planète fait d'ailleurs disparaître toute chance de succès.

La plupart des astronomes qui s'occupent de la question tombent dans une erreur relative aux étoiles doubles. Quand une

(1) Voir la Note au bas de la page 168.

des composantes de l'étoile double passe derrière l'autre, ils croient qu'elle doit se trouver déplacée par rapport à sa position véritable comme une étoile qui passe derrière le Soleil. Si l'étoile occultante était d'une grandeur comparable à celle du Soleil, le déplacement devrait être du même ordre, soit 1'',7. Ce phénomène créerait donc une irrégularité nettement visible dans le mouvement apparent d'une étoile double. Mais, si nous nous reportons à la page 140 nous voyons qu'une condition essentielle dans notre raisonnement, c'était l'énormité du rapport de la distance QP de l'étoile au Soleil à la distance EF du Soleil à la Terre. Ce n'est que dans ces conditions que le déplacement angulaire apparent d'un objet est égal à la déviation subie par les rayons lumineux qu'il émet. Il est facile de voir que dans le cas où ce rapport se trouve inversé, comme cela se produit pour une étoile double, le déplacement apparent n'est qu'une fraction extrêmement petite de la déviation de la lumière et il devient absolument imperceptible pour l'observateur terrestre.

S'il se trouvait que deux étoiles distinctes soient sensiblement sur la même ligne de visée à moins de 1'' d'arc l'une de l'autre, et que l'une d'elles soit à une grande distance derrière l'autre, nous serions, semble-t-il, dans des conditions bien plus favorables que nous ne l'étions précédemment dans le cas de l'étoile double. Je ne sais s'il existe des étoiles répondant à ces conditions. En tout cas, il semble que nous devrions voir l'étoile la plus éloignée non seulement par ses rayons lumineux qui nous arriveraient en ligne directe sans avoir pratiquement subi de déviation, mais aussi par ceux qui, contournant en partie l'étoile la plus proche, seraient déviés par l'attraction de cette dernière étoile. Cette seconde image, bien entendu, serait indiscernable de celle de l'étoile la plus proche mais elle lui donnerait un éclat supplémentaire qui disparaîtrait avec le temps, au fur et à mesure que les deux étoiles s'écarteraient. Si cependant nous considérons un pinceau de lumière côtoyant l'étoile la moins éloignée, les rayons les plus proches de l'astre se trouvent plus fortement courbés que les rayons les plus éloignés de sorte que la divergence du pinceau augmente ; cet accroissement est très petit, mais la divergence d'un faisceau provenant d'une source lumineuse située à quelque centaine de milliards de kilomètres

est elle-même extrêmement faible et le calcul montre aisément que l'accroissement de la divergence est suffisant pour affaiblir la clarté de l'étoile au point de la rendre invisible [1].

Si deux astres qui ne sont pas les composantes d'une étoile double se rapprochent encore plus de la même ligne de visée, et que l'un d'eux soit sur le point d'occulter l'autre, des phénomènes curieux peuvent être observés. Quand leur proximité apparente devient telle que les rayons directs émanant de l'étoile la plus éloignée passent à moins de 100 millions de kilomètres de l'étoile la plus proche, l'éclat de l'astre le plus lointain diminue considérablement, non pas parce que ses rayons se trouvent fortement déviés, mais parce que l'accroissement rapide de la divergence du faisceau lumineux diminue beaucoup la lumière envoyée par l'étoile dans nos télescopes. Ce sont là des considérations qui sont sans doute de peu d'importance, car il n'est guère probable que nous ayons jamais à notre disposition des étoiles assez proches angulairement l'une de l'autre pour que pareilles observations puissent être faites ; et même si un tel cas se présentait, il serait bien difficile de ne pas croire que l'affaiblissement pourrait être causé par quelque atmosphère absorbante entourant l'étoile la plus proche.

De Sitter a montré que la théorie d'Einstein apportait de légères modifications à la théorie du mouvement de la Lune. Le grand axe de son orbite et l'intersection de cet orbite avec le plan de l'écliptique devraient tous deux avancer de 2'' par siècle sur le mouvement que leur attribue la théorie de Newton. Malheureusement ni l'observation, ni la théorie newtonienne, ne sont poussées au degré de précision suffisant pour permettre une vérification de ce point ; un accroissement relativement faible de la précision actuelle suffirait néanmoins à rendre la comparaison possible.

Puisqu'il existe des étoiles qui ont peut-être une masse dix fois supérieure à celle du Soleil sans que leur rayon ait une longueur exagérée, ces astres devraient donner un déplacement plus considérable de leurs raies spectrales et se montrer plus favorables que le Soleil à la réalisation de la troisième expérience cruciale. Malheureusement, le déplacement prévu est indiscer-

[1] Appendice. Note 12.

nable de celui que causerait, comme conséquence du principe de Doppler-Fizeau, un mouvement de l'étoile suivant la ligne de visée. Ainsi le déplacement prévu dans le cas du Soleil est équivalent à celui qui résulterait d'une vitesse d'éloignement de 0,634 km./sec. Or, dans le cas du Soleil, nous savons exactement quelle est à chaque instant la vitesse d'éloignement ; pour les autres étoiles nous n'en savons rien. La seule indication que nous pourrions retirer de l'observation ce serait la connaissance d'une vitesse moyenne radiale des étoiles les plus grosses. Il paraît assez peu probable que dans l'ensemble des étoiles visibles il y ait une prépondérance des mouvements d'éloignement. Si par suite une telle prépondérance se révèle, il semble tout indiqué d'attribuer le déplacement spectral observé à la théorie d'Einstein. En fait on a reconnu que les étoiles les plus grosses (celles du type spectral B) paraissent douées d'une vitesse d'éloignement par rapport à nous d'environ 4 km. 5 par seconde, ce qui peut s'expliquer en supposant que les valeurs de $\frac{m}{r}$ relatives à ces étoiles ont une valeur environ sept fois plus grande que dans le cas du Soleil — hypothèse très vraisemblable. Ce phénomène était bien connu de tous les astrophysiciens quelques années avant la publication de la théorie d'Einstein. Mais ce phénomène a tant d'interprétations possibles qu'il en perd toute valeur. Ajoutons pour terminer que les étoiles « géantes » si diffuses du type M ont également une vitesse systématique d'éloignement considérable et que pour elles les valeurs de $\frac{m}{r}$ doivent être beaucoup moindres que pour le Soleil [1].

[1] Au moment de mettre sous presse l'édition française, nous apprenons que M. Pérot vient de confirmer aussi exactement qu'on pouvait l'espérer les prévisions d'Einstein sur le déplacement des raies spectrales ; ce physicien a comparé les raies du cyanogène dans la haute atmosphère solaire, à celles émises dans le vide sur terre, afin d'éliminer l'influence de la pression ; il a en outre discuté les conditions de l'expérience avec une rigueur qui semble mettre ses résultats à l'abri de toute critique.

(*Note du Trad.*).

CHAPITRE IX

Quantité de mouvement et Energie.

Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischen Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stunde an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren (1).

H. Minkowski (1908).

Une des conséquences fondamentales de la théorie de la relativité c'est de montrer que gravitation et inertie sont au fond deux choses identiques.

En mécanique, le débutant passe par un moment d'hésitation avant d'accepter la première loi du mouvement de Newton. Qu'un corps au repos reste au repos indéfiniment tant qu'aucune cause n'intervient pour le mettre en mouvement, il l'admet sans difficulté ; mais qu'un corps en mouvement conserve un mouvement rectiligne et uniforme tant que rien n'agit sur lui, voilà qui ne le satisfait pas pleinement. Rien n'est plus naturel que de regarder le mouvement comme une impulsion qui s'épuise d'elle-même, de sorte qu'un corps en mouvement finit nécessairement par s'arrêter. Le professeur n'a pas de difficulté à trouver des arguments qui viennent à bout de l'hésitation de son élève ; il lui suffit de parler du frottement que doit vaincre un train de chemin de fer ou une bicyclette en mouvement

(1) Les considérations sur l'espace et sur le temps que je viens de vous exposer, sont basées sur la physique expérimentale et c'est ce qui fait leur force. Elles sont de tendances révolutionnaires. Désormais, les notions d'espace et de temps considérées comme indépendantes et en elles-mêmes doivent rentrer dans l'ombre et seule leur union peut avoir une existence propre.

uniforme. Il montre que si l'on diminue le frottement, comme c'est le cas par exemple pour une pierre que l'on lance sur la glace, le mouvement dure plus longtemps de sorte que si tout frottement pouvait être éliminé, le mouvement uniforme se continuerait indéfiniment. Mais raisonner ainsi, c'est cacher sous un vernis spécieux que le mouvement, s'il n'avait aucun support — si l'on supprimait la glace — ne serait plus du tout uniforme, qu'il serait au contraire celui d'un corps en chute libre. Le professeur insiste probablement sur ce fait que le mouvement uniforme, pour se conserver, ne nécessite pas ce que l'on appelle une *cause*. C'est cette propriété qui a reçu le nom d'*inertie* ; mais on la regarde comme une tendance innée et passive, par opposition à la *force* qui, elle, est une cause active. Tant que l'on se limite aux pressions et aux tensions de la mécanique élémentaire où l'on suppose toujours les éléments matériels en contact direct, cette distinction peut se faire d'une manière sûre ; nous pouvons rendre visible en quelque sorte le martelage actif des molécules sur le corps, cause de son changement de mouvement. Mais quand on étend la force au champ de gravitation la distinction n'est plus aussi nette.

Pour notre part, nous rejetons toute espèce de distinction dans ce cas. La force de gravitation n'est pas un agent actif qui lutte contre la résistance passive de l'inertie. Gravitation et inertie, c'est tout un. Une trajectoire rectiligne parcourue d'un mouvement uniforme est essentiellement relative à un certain système de coordonnées que l'on se fixe par une convention. Nous ne pouvons évidemment pas imaginer que les corps savent quel est l'observateur qui les regarde et qu'il se manifeste en eux une tendance innée à prendre par rapport à cet observateur un mouvement rectiligne et uniforme — en même temps d'ordinaire qu'ils subissent quelque force active les obligeant à se déplacer d'une autre manière. S'il existe une tendance innée ce ne peut être que celle de suivre ce que nous avons appelé une ligne d'Univers naturelle — la ligne d'intervalle total maximum entre deux événements donnés. Nous aboutissons ainsi à cet énoncé nouveau pour la première loi du mouvement de Newton : « Tout corps tend à se mouvoir suivant la ligne d'Univers qu'il suit réellement, sauf dans le cas où des chocs matériels l'obligent à suivre quelque autre ligne d'Univers différente de

celle qu'il aurait suivie sans eux ». Personne, je pense, ne viendra contester l'exactitude de ce profond énoncé !

Que la trajectoire naturelle soit droite ou courbe, que le mouvement soit uniforme ou variable, dans tous les cas intervient quelque cause agissante et cette cause c'est la combinaison inertie-gravitation. De lui avoir donné un nom ne nous dispensera pas d'en donner une explication au moment voulu. En attendant, le fait que nous avons défini l'inertie et la gravitation comme des aspects différents d'une propriété unique nous explique pourquoi inertie et poids sont toujours proportionnels l'un à l'autre. Ce fait expérimental, vérifié avec le plus haut degré de précision, devrait, dans toute autre conception, être regardé comme une loi remarquable de la nature.

Nous savons que la ligne d'Univers naturelle est celle dont l'intervalle total est maximum entre deux quelconques de ses points ; comme c'est la seule ligne d'Univers définissable d'une manière absolue, il semble que ce soit là une raison suffisante pour qu'une particule entièrement libre la suive. Cette raison tant qu'elle est valable est satisfaisante mais il est naturel que nous désirions avoir une notion plus claire de la cause — inertie-gravitation — qui force le corps à suivre cette trajectoire.

Nous avons vu que le champ de gravitation qui entoure un corps implique l'existence d'une courbure de l'espace-temps, et que par suite il se forme autour de chaque particule matérielle une ride très fine. Mais une particule matérielle subit sans cesse un déplacement dans le temps si elle n'en subit pas toujours dans l'espace ; par suite, dans notre représentation quadridimensionnelle qui nous donne une vue d'ensemble sur le temps tout entier, la ride a la forme d'une longue cannelure qui entoure la ligne d'Univers de la particule sur tout son parcours. Or, cette cannelure, ou ce pli du continuum, ne peut suivre indistinctement n'importe quel trajet — les couturières le savent bien. La loi de gravitation d'Einstein donne la règle suivant laquelle la courbure d'Univers en un point quelconque de l'espace-temps est liée aux courbures prises en des points voisins ; par suite, si l'on se donne en un certain point la direction d'une cannelure, cette cannelure se trouve par là-même entièrement déterminée. Nous avons jusqu'ici étudié la loi de gravitation au point de vue spatial, autrement dit nous avons montré quelle

était la distribution dans l'espace de la ride gravitationnelle et ceci correspond à l'affirmation de la loi de Newton qui nous apprend que la force varie en raison inverse du carré de la distance. Mais la loi d'Einstein montre de plus comment le champ de gravitation se distribue dans le temps puisqu'il n'existe aucune distinction fondamentale entre l'espace et le temps. L'analyse mathématique permet de déduire de la loi d'Einstein que toute ride dont la forme correspond à une particule matérielle, suit nécessairement la ligne d'Univers d'intervalle total maximum.

La ligne d'Univers d'une particule matérielle est ainsi déterminée par l'action du champ de gravitation excessivement petit qui l'entoure et qui, autant que nous pouvons le présumer, la constitue, sur l'espace-temps fondamental de la région où elle se trouve. Les différentes formes que cette ligne peut prendre trouvent leur explication dans la nouvelle loi de gravitation. C'est mettre sur le même plan les trajectoires rectilignes des étoiles et les trajectoires courbes de leurs planètes, et c'est les expliquer de la même manière. La seule loi universelle d'après laquelle la courbure de l'espace-temps ne peut dépasser le premier degré, suffit pour fixer une fois pour toutes la forme de toutes les cannelures qui peuvent exister dans ce continuum.

L'application de la loi d'Einstein à l'étude de la distribution du champ de gravitation non seulement dans l'espace mais aussi dans le temps conduit à une grande simplification de la mécanique. Si nous nous donnons comme point de départ une tranche étroite d'espace-temps figurant l'état de l'Univers pendant quelques secondes avec toutes les petites rides entourant des particules matérielles bien déterminées, nous pouvons alors rattacher successivement à cette tranche toutes les autres portions de l'espace-temps et trouver la position des rides à tous les instants postérieurs à celui considéré (les forces électriques étant exclues). Nous n'avons eu besoin que de la loi de gravitation — la courbure d'Univers n'est pas supérieure au premier degré — et il n'existe aucune conséquence de la mécanique qui ne soit comprise dans cette loi. Les lois de conservation de la masse, de l'énergie, de la quantité de mouvement sont toutes implicitement contenues dans la loi d'Einstein. Il peut paraître singulier que ce soit la loi de gravitation d'Einstein qui porte en elle la mécanique tout entière car dans la plupart des pro-

blèmes que nous pose cette science, la gravitation, prise avec sa signification courante, est un facteur que l'on néglige. Seulement, inertie et gravitation ne sont qu'une seule et même chose ; la loi d'Einstein est aussi la loi de l'inertie et l'inertie ou la masse intervient dans tous les problèmes de la mécanique. Si, dans nombre de questions, nous considérons la gravitation comme négligeable, cela signifie simplement que nous pouvons ne pas tenir compte de l'action mutuelle des rides très petites les unes sur les autres ; au contraire, nous ne pouvons négliger l'action de la ride d'une particule sur l'espace-temps fondamental qui la contient car c'est précisément cette action qui constitue l'inertie de la particule.

La conservation de l'énergie et la conservation de la quantité de mouvement suivant trois directions non parallèles à un même plan, constituent quatre lois et s'expriment par quatre équations qui sont capitales dans les différentes branches de la mécanique. Bien qu'elles soient applicables dans le cas où la gravitation prise avec son sens ordinaire est sans action, elles doivent pouvoir se déduire comme toute autre proposition mécanique, de la loi de gravitation. C'est le grand triomphe de la théorie d'Einstein que sa loi permette de donner une déduction générale et rigoureuse de principes expérimentaux qui jusque-là avaient semblé entièrement étrangers à la gravitation. Nous ne pouvons entrer dans les détails mathématiques qui établissent ces équations par déduction à partir de la loi fondamentale de gravitation mais nous allons voir d'une manière générale comment on peut y arriver.

Nous avons déjà montré que si les valeurs des $G_{\mu\nu}$ sont rigoureusement nulles en tout point de l'espace-temps, leurs valeurs moyennes pour une région de petite étendue contenant un grand nombre de particules matérielles, valeurs dites « macroscopiques », sont différentes de zéro (1). Ces valeurs macroscopiques peuvent être exprimées en fonction du nombre, des masses et des vitesses des particules. Pour les $G_{\mu\nu}$ nous avons pris des moyennes ; nous devrons donc opérer de même à l'égard des particules ; autrement dit, nous y substituerons une distri-

(1) On commence par prendre la moyenne des valeurs de g ; les $G_{\mu\nu}$ sont calculés par les formules de la Note 5.

bution continue de la matière possédant des propriétés équivalentes. Nous obtiendrons ainsi des équations macroscopiques de la forme :

$$G_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}.$$

Le premier membre de ces équations contient des termes d'une nature un peu abstraite caractérisant le genre d'espace-temps considéré ; dans l'autre ($K_{\mu\nu}$) nous trouvons des quantités physiques bien connues qui nous donnent la densité, la quantité de mouvement, l'énergie et les forces élastiques de la matière présente. Ces équations dérivent de la seule loi de gravitation par le processus qui consiste à prendre une moyenne.

Parallèlement, dans la théorie newtonienne de la gravitation on emploie un procédé en tous points semblable pour passer de l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$ à l'équation de Poisson relative à une distribution continue de la matière $\Delta\varphi = -4\pi\rho$.

Dans cette hypothèse d'une matière continue, *n'importe quel* genre d'espace-temps devient possible. La loi de gravitation au lieu de rejeter la possibilité de certains genres d'espace-temps, détermine les valeurs de $K_{\mu\nu}$ c'est-à-dire la distribution et le mouvement de la matière continue qui répondent au genre envisagé. Nous ne sommes pas en opposition avec l'énoncé primitif de la loi car cet énoncé se rapportait aux cas où l'on excluait la présence d'une matière continue. N'importe quel groupe de valeurs des potentiels est maintenant possible ; le calcul nous permet d'en déduire les valeurs correspondantes des $G_{\mu\nu}$ et nous obtenons immédiatement dix équations déterminant $K_{\mu\nu}$ qui expriment les conditions que doit remplir la matière pour produire ces potentiels. Mais n'est-il pas possible que la distribution dans l'espace-temps trouvée pour la matière soit inacceptable, qu'elle viole les lois de la mécanique ? Non, nous ne devons pas dire *les* lois car il n'y a qu'une loi de la mécanique, la loi de gravitation. Or nous avons déterminé la distribution de la matière par les équations $G_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}$ et il n'y a pas d'autres conditions à remplir. La distribution est donc mécaniquement possible ; elle peut néanmoins être irréalisable pratiquement car elle peut nécessiter une densité de la matière démesurément élevée ou même négative.

A propos de la loi $G_{\mu\nu} = 0$ relative à une région vide de matière, nous avons signalé que cette condition représentait bien dix équations mais que six seulement d'entre elles étaient indépendantes ; ceci, parce que dix équations auraient suffi à déterminer les dix potentiels d'une manière complète et nous auraient permis de fixer non seulement le genre de l'espace-temps, mais aussi celui du système de coordonnées. Il est clair que nous devons nous réserver le droit de tracer comme bon nous semble ce système de coordonnées car son choix, loin d'être déterminé par une loi de la nature, doit rester entièrement arbitraire. Pour rendre compte du quadruple degré d'arbitraire de ce choix, il doit y avoir quatre identités toujours satisfaites par les $G_{\mu\nu}$ de telle sorte que six de ces équations étant données les quatre équations restantes ne sont que des tautologies.

Ces relations doivent être des identités provenant de la définition mathématique des $G_{\mu\nu}$; en d'autres termes, quand dans ces relations les $G_{\mu\nu}$ sont explicités d'après leurs définitions et que toutes les opérations indiquées ont été effectuées, les différents termes doivent se détruire et laisser subsister la seule identité $0 = 0$. Le point essentiel c'est que ces quatre équations proviennent du mode de formation des $G_{\mu\nu}$ à partir de leurs constituants plus simples (les $g_{\mu\nu}$ et leurs coefficients différentiels) et qu'elles s'appliquent en toutes circonstances. Ces quatre relations identiques ont été effectivement trouvées (¹).

Dans l'hypothèse de la matière continue où $G_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}$, les mêmes quatre relations doivent évidemment exister entre les $K_{\mu\nu}$ non pas sous forme d'identité, mais en tant que conséquences de la loi de gravitation, c'est-à-dire de l'égalité des $G_{\mu\nu}$ et des $K_{\mu\nu}$.

Ainsi, les quatre dimensions de l'Univers apportent un arbitraire d'ordre quatre dans le choix du système de coordonnées, ce qui doit se traduire nécessairement par l'existence de quatre relations identiques entre les $G_{\mu\nu}$; finalement, comme conséquence de la loi de gravitation, ces identités établissent quatre faits nouveaux ou quatre lois nouvelles relatives à la densité,

(¹) Appendice. Note 13.

à l'énergie, à la quantité de mouvement ou aux tensions de la matière, grandeurs qui entrent dans la constitution des $K_{\mu\nu}$.

Ces quatre lois sont les lois de la conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de l'énergie.

L'argument précédent est tellement général que nous pouvons aller jusqu'à affirmer qu'à toute propriété *absolue* d'un volume de l'Univers à quatre dimensions (ici la *courbure*) doivent correspondre quatre propriétés relatives qui restent invariantes. Ce pourrait être là le point de départ d'une étude générale des propriétés d'un Univers que notre perception nous montrerait invariable, c'est-à-dire un Univers dont la substance se conserverait.

Il existe une autre loi de la physique que l'on regardait autrefois comme fondamentale — celle de la conservation de la masse. Les progrès de la science moderne ont déjà quelque peu modifié notre position à son égard ; non pas qu'on ait rejeté son exactitude, mais son interprétation a changé et finalement elle est venue se confondre avec la loi de la conservation de l'énergie. Il est peut-être utile à ce propos d'entrer dans quelques détails.

On supposait autrefois que la masse d'une particule était un nombre qui lui était attaché, qui exprimait une propriété intrinsèque et qui restait invariable à travers toutes les vicissitudes de cette particule. Soient m ce nombre, u la vitesse de la particule, la quantité de mouvement est mu ; c'était alors la loi de la conservation de la quantité de mouvement qui définissait la masse m. Prenons par exemple deux particules de masses $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, mobiles sur la même ligne droite. Sur un diagramme d'espace-temps, pour un observateur S, la vitesse de la première particule sera représentée par le vecteur OA (Fig. 19). Cette particule se déplace d'une distance MA dans un temps-unité ; MA est donc égal à sa vitesse par rapport à l'observateur S. Prolongeons la ligne OA jusqu'à sa rencontre avec la ligne de temps constant passant par la deuxième division de l'axe des temps ; NB est égal à la vitesse multipliée par la masse 2 ; la distance horizontale NB figure donc la quantité de mouvement. De même, partant de B et traçant BC dans la direction de la vitesse de m_2 prolongée jusqu'à son intersection avec la ligne passant par la cinquième division, le déplacement

horizontal à partir de B représente la quantité de mouvement de la deuxième particule. Le vecteur PC représente la quantité de mouvement totale du système des deux particules.

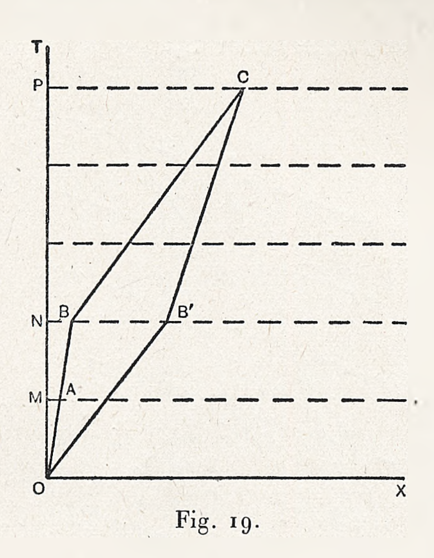


Fig. 19.

Supposons que survienne quelque modification dans leurs vitesses mais que l'extérieur ne communique aucune quantité de mouvement à l'une ou à l'autre des deux particules — une collision, par exemple. La quantité de mouvement totale PC étant inaltérée, une construction semblable faite avec les nouvelles vitesses doit encore nous amener en C ; autrement dit, les nouvelles vitesses sont représentées par les directions OB', B'C, B' étant quelque autre point de la ligne NB.

Cherchons maintenant comment tout ceci apparaîtra à un observateur S_1 en mouvement uniforme par rapport à S. Ses transformations d'espace et de temps ont été étudiées au Chapitre III ; elles se trouvent représentées dans la Fig. 20 qui nous permet de comparer son mode de division du temps à celui de S. Un même mouvement réel est, bien entendu, figuré par des directions parallèles dans les deux diagrammes mais l'interprétation de MA en tant que vitesse diffère dans les deux cas. Prolongeant la direction de la vitesse de m_1 pendant deux divisions de temps, celle de m_2 pendant trois comme précédemment nous trouvons que la quantité de mouvement totale

pour l'observateur S_1 est représentée par PC (Fig. 20) ; répétant la même construction sur les vitesses des deux particules après leur choc nous arrivons en un point C' différent. La quantité de mouvement se conservait pour l'observateur S et elle varie de PC à PC' pour l'observateur S_1.

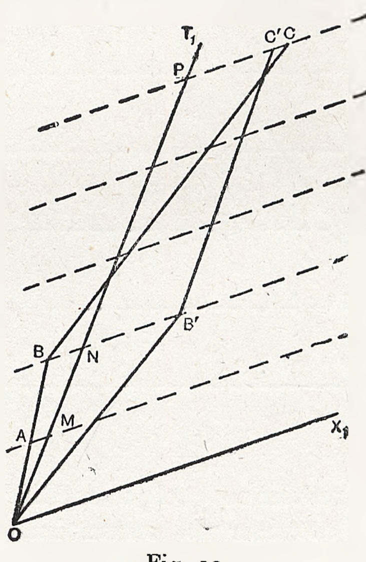


Fig. 20.

Cette différence provient de ce que dans la construction nous avons prolongé les lignes jusqu'à leur rencontre avec des lignes de partage qui ne sont pas les mêmes pour les deux observateurs. La règle pour la détermination de la quantité de mouvement doit être telle que les deux observateurs, par une même construction indépendante de leurs divisions respectives de l'espace et du temps, doivent parvenir par deux chemins différents au même point C. Il importera peu alors que, par suite de leurs manières différentes de compter le temps, les deux observateurs mesurent la quantité de mouvement l'un par une longueur horizontale, l'autre par une longueur oblique ; tous deux seront d'accord pour dire que la collision n'a pas modifié la quantité de mouvement totale. Pour obtenir une telle construction nous devrons avoir recours à l'intervalle qui, lui, est le même pour les deux observateurs ; donnons à OB un inter-

valle total de 2 unités, à BC un intervalle total de 3 unités en rejetant tout système de coordonnées. Les deux observateurs dessineront le même diagramme et aboutiront au même point C (différent des points C et C' des diagrammes précédents). Par suite si pour l'un d'eux la quantité de mouvement ne varie pas, il en sera de même pour l'autre.

Tout ceci implique une définition nouvelle de la quantité de mouvement ; il faut maintenant que ce soit le produit de la masse par le déplacement d'espace δx parcouru pendant un intervalle δs au lieu d'un temps δt. Donc :

$$\text{quantité de mouvement} = m \frac{\delta x}{\delta s},$$

au lieu de :

$$\text{quantité de mouvement} = m \frac{\delta x}{\delta t}.$$

La masse m conserve alors son caractère de nombre invariant attaché à la particule. Pour savoir si la quantité de mouvement telle que nous venons de la définir se conserve ou non réellement, c'est à l'expérience que nous devons nous adresser, ou bien il nous faut chercher si ce fait peut être déduit théoriquement de la loi de gravitation. Un point important c'est que la définition primitive de la quantité de mouvement est incompatible avec sa conservation, car si cette dernière a bien lieu pour un observateur elle peut n'avoir plus lieu pour un autre. La définition nouvelle au contraire rend possible cette conservation générale. En fait, cette expression de la quantité de mouvement est précisément celle que l'on déduit de la loi de gravitation en s'appuyant sur les identités dont nous avons déjà parlé. En ce qui concerne la confirmation expérimentale, il suffit pour le moment de remarquer que, dans la pratique courante, l'intervalle et la durée sont des quantités si peu différentes que toute confirmation expérimentale de la conservation de la quantité de mouvement prise avec son sens primitif peut être regardée comme une confirmation de la même loi quand la quantité de mouvement répond à sa nouvelle définition.

Dans la théorie de la relativité la quantité de mouvement apparaît donc comme le produit d'une masse invariable par

une vitesse légèrement modifiée $\frac{\delta x}{\delta s}$. Le physicien préfère pourtant conserver dans ses problèmes l'ancienne définition où la quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse $\frac{\delta x}{\delta t}$. Comme :

$$m\frac{\delta x}{\delta s} = m\frac{\delta t}{\delta s} \cdot \frac{\delta x}{\delta t},$$

la quantité de mouvement se trouve scindée en deux facteurs : une vitesse $\frac{\delta x}{\delta t}$ et une masse $M = m\frac{\delta t}{\delta s}$ qui n'est plus un invariant pour la particule mais qui dépend du mouvement de celle-ci par rapport à l'espace-temps de l'observateur. Pour parler le langage courant du physicien nous désignerons par le nom de masse (à moins que ce terme ne soit autrement employé) la quantité M.

Dans un système d'axes rectangulaires sans accélération nous avons par définition de s :

$$\delta s^2 = \delta t^2 - \delta x^2 - \delta y^2 - \delta z^2,$$

de sorte que :

$$\left(\frac{\delta s}{\delta t}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)^2 - \left(\frac{\delta y}{\delta t}\right)^2 - \left(\frac{\delta z}{\delta t}\right)^2$$
$$= 1 - u^2,$$

u étant la vitesse de la particule (en supposant la vitesse de la lumière égale à l'unité). Donc :

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot$$

La masse croît avec la vitesse, le facteur de cette croissance étant le même que celui qui détermine la contraction de Fitzgerald.

Cette variation de la masse avec la vitesse est une proposition qui demande une confirmation expérimentale. Pour réussir l'expérience il faut pouvoir disposer de vitesses élevées et appliquer une force connue suffisamment grande pour produire une déviation appréciable dans la trajectoire de la particule. Ces conditions se trouvent réalisées dans le cas des particules négatives émises par les substances radioactives, connues sous le nom de particules β, ou encore dans le cas des particules sem-

blables qui constituent les rayons cathodiques. Ces particules atteignent des vitesses allant jusqu'aux 8/10e de la vitesse de la lumière ; l'accroissement de la masse peut alors se faire dans le rapport de 1,66 à 1 ; leur charge négative permet de leur appliquer une force électrique ou magnétique suffisamment intense. Les expériences modernes confirment parfaitement l'accroissement théorique de la masse ; elles montrent que le facteur d'accroissement $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ est exact d'une manière très approchée. Ces expériences furent d'abord faites par Kaufmann ; mais elles furent reprises plus tard selon des méthodes récentes permettant une précision beaucoup plus grande.

Tant que la vitesse n'est pas très grande, la masse M peut être mise sous la forme :

$$\frac{m}{\sqrt{1-u^2}} = m + \frac{1}{2} mu^2.$$

Elle se compose alors de deux parties, la masse au repos et le second terme qui n'est autre que l'énergie cinétique. Si nous pouvons dire que le terme m représente une espèce d'énergie potentielle emmagasinée dans la matière, il nous est alors possible d'identifier la masse avec l'énergie. L'accroissement de la masse avec la vitesse signifie simplement qu'il est venu s'ajouter de l'énergie cinétique. Ce qui nous enhardit et nous incite à faire cette hypothèse c'est le modèle que nous offre la charge électrique où la masse électrique n'est autre que l'énergie du champ statique. De même, la masse de la lumière est simplement l'énergie électromagnétique des ondes lumineuses.

Dans nos systèmes d'unités habituels la vitesse de la lumière n'est pas égale à l'unité ce qui est la cause d'une distinction d'un caractère assez artificiel entre la masse et l'énergie. Ces deux grandeurs sont mesurées à l'aide d'unités différentes, l'énergie E ayant une masse $\frac{E}{C^2}$ où C est la vitesse de la lumière dans le système d'unités employé. Néanmoins, il semble plus que probable que masse et énergie sont deux formes de la mesure de ce qui est essentiellement une seule et même chose, de même que parallaxe et distance d'une étoile sont deux manières différentes d'exprimer une même propriété de sa position. A cette objection que ces deux grandeurs ne doivent pas être confondues

parce qu'elles sont des propriétés distinctes, il faudrait répondre qu'elles ne sont pas des propriétés que peuvent percevoir nos sens mais seulement deux expressions mathématiques, quotient et produit de deux grandeurs qui elles, au contraire, sont des propriétés perceptibles d'une manière immédiate, la quantité de mouvement et la vitesse. En somme, ce ne sont donc essentiellement que des combinaisons utiles au mathématicien.

La preuve précédente de la variation de la masse avec la vitesse est beaucoup plus générale que celle basée sur la théorie électrique de l'inertie. Elle est immédiatement applicable à la matière prise en masse. Les masses m_1 et m_2 ne sont pas nécessairement attachées à des particules ; elles peuvent s'appliquer à des corps de dimensions et de nature quelconques. La théorie électrique de l'inertie ne permet pas de déduire la variation de masse d'une planète de celle d'un électron.

Nous devons remarquer que si la masse d'inertie d'une particule n'est mesurable physiquement que par des procédés faisant intervenir une variation de la vitesse de cette particule, c'est précisément au moment où la vitesse varie que la notion de masse est la moins claire ; c'est qu'en effet à ce moment-là, l'énergie cinétique qui forme une partie de la masse, se trouve partiellement communiquée à une autre particule ou bien est rayonnée dans l'espace environnant ; il est presque impossible de définir le moment où cette énergie cesse d'appartenir à la particule et doit être comptée comme énergie libre. La valeur de l'énergie ou de la masse dans une région donnée est toujours une quantité bien déterminée mais la valeur attribuable à une particule n'est définie que dans le cas où son mouvement est uniforme. Si l'on veut être exact, il faut le plus souvent considérer la masse non pas d'une particule mais de toute une région.

Le mouvement de la matière d'un lieu à un autre produit généralement une modification du champ de gravitation de l'espace environnant. Si la vitesse est uniforme, le champ partage simplement le mouvement de la matière ; si au contraire le mouvement est accéléré, quelque chose dans le genre d'une onde de gravitation se propage à l'extérieur. La vitesse de propagation est celle de la lumière. Les lois exactes ne sont pas simples car nous avons vu que le champ de gravitation modifie

la vitesse de la lumière de sorte que c'est la perturbation elle-même qui modifie la vitesse avec laquelle elle se propage. Si, de même, les lois exactes de la propagation du son sont extrêmement compliquées c'est que la perturbation de l'air due au son modifie la vitesse avec laquelle celui-ci se propage. Quant aux lois approchées de la propagation de la gravitation, elles sont des plus simples et sont identiques aux lois de propagation des perturbations électromagnétiques.

Après la masse et l'énergie il existe une grandeur qui joue dans la physique moderne un rôle fondamental ; c'est l'*Action*. Le mot « action » a ici une signification théorique qu'il ne faut pas confondre avec le sens qu'il a dans « l'action et la réaction » de Newton. Dans la théorie de la relativité en particulier, c'est là un point qui, sous tous les rapports, semble capital. Il est facile d'en voir la raison. Quand nous parlons de la matière continue qui existe *en un point* quelconque de l'espace et du temps, nous devons nous servir du mot *densité*. Le produit de la densité par un volume d'espace donne la *masse*, ou bien ce qui paraît revenir au même, l'*énergie*. Or, à notre point de vue quadridimensionnel il y a quelque chose de beaucoup plus important, c'est le produit de la densité par un volume à quatre dimensions d'espace et de temps, produit que l'on désigne sous le nom d'*action*. Si donc on multiplie la densité par les trois dimensions d'espace, on obtient la masse ou l'énergie ; une quatrième multiplication donne le produit de la masse ou de l'énergie par le temps. L'action est donc la masse multipliée par le temps, ou encore le produit de l'énergie par le temps, et c'est une grandeur bien plus fondamentale que la masse ou l'énergie.

L'action est la courbure de l'Univers. C'est là une affirmation à peu près impossible à rendre concrète parce que notre notion de la courbure provient de l'étude des surfaces à deux dimensions dans un espace à trois dimensions et cela nous donne une idée trop étroite de ce que peut être une surface à quatre dimensions dans un espace à cinq ou à plus de cinq dimensions. Dans les surfaces à deux dimensions il y a tout juste une courbure totale ; si cette courbure est nulle, la surface est plane ou du moins peut être déroulée et appliquée sur un plan. Pour la surface à quatre

dimensions il y a plusieurs coefficients de courbure ; cependant, il y a une courbure par excellence qui, naturellement, est un invariant indépendant du système de coordonnées choisi. C'est cet invariant que l'on désigne par G. Il ne s'ensuit pas que le seul fait que cette courbure soit nulle suffise pour rendre l'espace-temps euclidien ; nous avons vu au contraire que dans un champ de gravitation naturel, l'espace-temps n'était pas euclidien bien qu'il puisse n'y avoir aucune masse ou énergie présente et par suite, ni action, ni courbure.

Là où il y a matière [1], il y a action et par suite courbure ; il est intéressant de remarquer que dans la matière ordinaire on rencontre une courbure de l'espace-temps qui n'est pas du tout à négliger. Ainsi dans de l'eau prise avec sa densité normale la courbure est identique à celle d'un espace sphérique de 570.000.000 km. de rayon. Le résultat est encore plus frappant si on l'exprime en unités de temps ; le rayon serait environ de une demi-heure, la vitesse de la lumière étant toujours prise comme unité.

Il n'est pas facile de donner une signification concrète à ce qui précède ; du moins pouvons-nous prédire qu'un globe d'eau de 570.000 000 km. de rayon aurait des propriétés extraordinaires. Il doit sans doute y avoir une limite supérieure aux dimensions possibles d'un tel globe et je crois qu'une masse homogène d'eau ayant des dimensions notablement supérieures aux précédentes ne pourrait pas exister. Pareille sphère n'aurait pas de centre, pas de limites ; tous les points de la masse auraient par rapport à l'ensemble la même position relative — de même que les points de la *surface* d'une sphère par rapport à cette surface prise dans son ensemble. Tout rayon lumineux après y avoir voyagé pendant une heure ou deux reviendrait à son point de départ. Rien ne pourrait pénétrer dans la masse ou bien la quitter car il n'existe nulle limite par où l'on pourrait entrer ou sortir ; en fait cette masse aurait même étendue

[1] Il est curieux de remarquer qu'il n'y a pas d'action dans un espace ne contenant que de la lumière. La lumière a bien une masse (M) au sens ordinaire de ce mot, mais la masse invariante (m) est nulle. L' «action » que la théorie électromagnétique classique attribue au champ électromagnétique, se montre d'un caractère différent de l'action matérielle ou gravitationnelle.

que l'espace. Il ne pourrait y avoir quelque part ailleurs un autre Univers car ce « quelque part ailleurs » n'existerait pas.

La masse de ce volume d'eau n'est pas aussi grande que les évaluations les plus modérées de la masse du système stellaire. Quelques physiciens ont prédit que dans un avenir lointain, toute l'énergie sera dégradée et les étoiles tombées les unes sur les autres se fondront toutes en une masse unique. Peut-être alors verrait-on réalisées les étranges conditions dont nous venons de parler !

Les lois de la gravitation, les lois de la mécanique, celles du champ électromagnétique ont toutes été englobées dans le Principe de Moindre Action. Cette unification s'était faite en grande partie avant la théorie de la relativité ; il n'y a que l'addition de la gravitation qui soit nouvelle. Nous pouvons voir maintenant que si l'action est quelque chose d'absolu, une configuration quelconque réalisant l'action minimum sera susceptible de recevoir une définition absolue ; nous pouvons donc nous attendre à ce que les lois de l'Univers puissent s'énoncer sous une forme analogue. On voit que le raisonnement est semblable à celui que nous avons fait pour identifier les lignes d'Univers naturelles des particules avec les lignes d'intervalle total maximum. Il faut avouer cependant que le fait que toute loi doit inévitablement revêtir une pareille forme nous décourage plutôt de chercher de ce côté la voie qui pourrait nous conduire à la connaissance des détails de la structure de notre Univers.

L'action est l'une des deux notions de la physique prérelativiste qui aient subsisté sans modification dans une description de l'Univers absolu. L'autre survivant est l'entropie. La théorie de la relativité, avant sa venue, avait en quelque sorte projeté son ombre devant elle et la physique convergeait déjà vers deux grandes généralisations : le principe de moindre action et la deuxième loi de la thermodynamique ou principe de l'entropie maximum.

Nous allons bientôt passer à des développements récents et plus obscurs de la théorie ; aussi, me semble-t-il opportun de jeter maintenant un coup d'œil sur les étapes franchies et de résumer les principaux résultats obtenus.

1° L'ordre des événements de l'Univers extérieur à nous est un ordre quadridimensionnel.

2° L'observateur, instinctivement ou volontairement, construit un système de coordonnées (mode de division de l'espace et du temps) et situe les événements par rapport à ce système.

3° Il semble théoriquement possible de faire une description des phénomènes sans faire intervenir aucun système de coordonnées (par un catalogue de coïncidences) ; mais pareille description serait d'un emploi difficile. Dans la pratique, la physique nous donne les relations des événements avec notre système de coordonnées ; tous les termes que l'on rencontre dans la physique élémentaire et la vie courante ont rapport à cet aspect relatif de l'Univers.

4° Des quantités telles que la longueur, la durée, la masse, la force, etc., n'ont pas de signification absolue ; leurs valeurs dépendent du système de coordonnées auquel on les rapporte. Quand on a bien saisi ce point, les résultats des expériences modernes au sujet des variations de longueur des corps rigides perdent tout caractère paradoxal.

5° Il n'y a pas de système de coordonnées fondamental. Dans chaque problème particulier et plus spécialement dans les régions d'étendue limitée, il est possible de choisir un système de coordonnées qui épouse de plus ou moins près la structure absolue de l'Univers, ce qui simplifie la description des phénomènes qui s'y produisent. Cependant la structure de l'Univers n'est pas de nature à se laisser représenter de manière absolue par des coordonnées et dans une région qui n'est plus petite le système de coordonnées doit être considéré comme entièrement arbitraire. Dans tous les cas, les systèmes utilisés dans la physique courante sont arbitraires.

6° L'étude de la structure absolue de l'Univers est fondée sur la notion d' « intervalle » entre deux événements voisins, qui est un attribut absolu de ce couple d'événements, indépendant de tout système de coordonnées. On construit une géométrie de l'Univers en regardant l'intervalle comme l'analogue de la distance dans la géométrie ordinaire.

7° Cette géométrie de l'Univers diffère de la géométrie euclidienne en ce sens qu'un intervalle entre deux événements réels peut être lui-même réel ou imaginaire. La nécessité d'une distinction physique, correspondant à la distinction mathématique d'intervalles réels ou imaginaires, nous conduit à décom-

poser l'ordre quadridimensionnel en espace et en temps. Mais cette division n'est pas unique et la décomposition adoptée couramment dépend de la ligne d'Univers de l'observateur.

8° La géodésique ou trajectoire d'intervalle total maximum ou minimum entre deux événements distants a une signification absolue. Comme il n'existe aucun autre genre de trajectoire susceptible d'une définition absolue, nous devons en conclure que les lignes d'Univers des particules qui se meuvent librement, sont des géodésiques.

9° Dans la géométrie euclidienne, les géodésiques sont des lignes droites. Il est évidemment impossible de choisir nos modes de mesure de l'espace et du temps de telle sorte que toutes les particules libres contenues dans le système solaire se meuvent sur des lignes droites. Par suite la géométrie dans un champ de gravitation est nécessairement non euclidienne.

10° Les lignes d'Univers de particules mobiles dans un champ de gravitation obéissent évidemment à quelque loi ; les géométries possibles doivent donc se limiter à certains types.

11° Cette limitation concerne la structure absolue de l'Univers ; elle doit être indépendante du choix du système de coordonnées et ceci réduit le nombre possible des caractères distinctifs. Pratiquement, la seule hypothèse raisonnable que l'on puisse faire est celle-ci : « la courbure de l'Univers (dans une région vide de matière) ne doit pas être d'un degré supérieur au premier ». Tel est l'énoncé de la loi de la gravitation.

12° On a cherché quel était le plus simple des types de courbure possédant ce caractère. On a trouvé que c'était une sorte de cheminée dont l'extrémité serait rejetée à l'infini mais que nous pouvons supposer coupée et terminée par une région où la loi de gravitation ne serait pas respectée, où, en d'autres termes, se trouverait de la matière.

13° Les géodésiques de ce relief sont en accord extrêmement étroit avec les trajectoires prévues par la loi de gravitation de Newton. Les écarts légers à la loi newtonienne ont été confirmés expérimentalement par le mouvement de Mercure et la déviation de la lumière.

14° La forme de relief la mieux appropriée serait celle d'un plissement s'étendant en ligne droite. L'intervalle total pris suivant sa direction étant réel, ou dans le temps, on peut prendre

cette direction pour axe des temps. La matière a donc une existence continue dans le temps. De plus, pour rester en accord avec la loi de gravitation, il faut admettre que tout plissement léger suit le trajet d'une géodésique dans le champ primitif de l'espace-temps ; ce qui confirme la conclusion à laquelle nous avons abouti dans le paragraphe (8).

15° Les lois de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement en mécanique peuvent se déduire de la loi de la courbure d'Univers ou loi de gravitation.

16° Certains phénomènes tels que la contraction de Fitzgerald ou la variation de la masse avec la vitesse, que l'on attribuait autrefois à l'action de forces électriques, apparaissent aujourd'hui comme des conséquences générales de la relativité de notre connaissance. En d'autres termes, longueur et masse n'étant que les relations de quelque chose d'absolu au système de coordonnées de l'observateur, nous pouvons prédire comment seront modifiées ces relations quand on changera le système de référence.

CHAPITRE X

Vers l'Infini.

The geometer of to-day knows nothing about the nature of actually existing space at an infinite distance ; he knows nothing about the properties of this present space in a past or a future eternity. He knows, indeed, that the laws assumed by Euclid are true with an accuracy that no direct experiment can approach, not only in this place where we are, but in places at a distance from us that no astronomer has conceived ; but he knows this as of Here and Now ; beyond this range is a There and Then of which he knows nothing at present, but may ultimately come to know more (1).

W.-K. Clifford (1873).

La grande difficulté rencontrée par la philosophie qui rejette l'existence d'un espace absolu, vient de la possibilité de mettre expérimentalement en évidence la rotation absolue. La rotation de la Terre autour de son axe fut suggérée par l'observation du mouvement diurne des corps célestes, c'est-à-dire essentiellement par une observation de rotation relative ; et, si la question en était restée là, il n'aurait jamais surgi la moindre difficulté. Or, nous pouvons mettre la même rotation en évidence, ou du moins une rotation à très peu près égale, par des méthodes qui semblent ne pas faire intervenir la présence des corps céles-

(1) Le Géomètre actuel ignore tout de la nature de l'espace à l'infini ; il ignore tout également des propriétés de l'espace présent dans l'éternité passée ou dans l'éternité future. Il ne sait qu'une chose, c'est que les lois qu'admit Euclide sont exactes, à un degré de précision auquel ne peut prétendre aucune expérience directe, non seulement à l'endroit où nous sommes mais aussi à une distance de nous si grande que nul astronome ne peut la concevoir ; sa science se résume en ces deux points : Ici et Maintenant ; du « Là-bas » et de l' « Alors » il ne sait rien actuellement mais peut-être son ignorance finira-t-elle par se dissiper.

tes. La planète Jupiter toute couverte de nuages a des habitants qui ignorent sans doute l'existence des corps extérieurs ; ils peuvent néanmoins fort bien mesurer la rotation de Jupiter. A l'aide du compas gyrostatique, ils détermineraient deux points fixes sur la planète — le pôle Nord et le pôle Sud. L'expérience de Foucault sur la variation du plan d'oscillation d'un pendule suspendu librement, leur permettrait de trouver la valeur de la vitesse angulaire autour de la ligne des pôles. Il existe donc sûrement une constante physique bien définie, une vitesse angulaire autour de l'axe, qui, pour les habitants de Jupiter présente une importance capitale ; toute la question est de savoir si nous avons le droit de dire que cette constante mesure une rotation absolue.

Prenons par opposition la translation absolue. Là, il n'est plus question de donner un nom plus ou moins exact à une certaine constante physique car les habitants de Jupiter n'auront aucune constante à désigner. Nous voyons toute la différence qui sépare une théorie de la relativité de translation d'une théorie de la relativité de rotation. Le rôle de la première est d'expliquer des faits ; la seconde doit chercher une explication qui mette en évidence le caractère décevant de certains faits et nous permette de les éliminer.

Notre théorie actuelle semble nous offrir un moyen de résoudre ce problème ; en réalité elle nous laisse en route. Elle permet à l'observateur, s'il le veut, de considérer la Terre comme dépourvue de rotation mais par contre environnée par un champ de force centrifuge ; tous les autres corps de l'Univers tournent alors autour de la Terre, en suivant des orbites principalement déterminées par ce champ de force centrifuge. L'astronomie, vue sous ce jour, est un peu moins maniable ; néanmoins tous les phénomènes s'expliquent parfaitement. La force centrifuge fait partie d'un champ de gravitation ; elle obéit à la loi d'Einstein de sorte que les lois de la nature sont compatibles avec ce mode de représentation. Il subsiste une question embarrassante. Quelle est la cause de la force centrifuge ? Ce n'est évidemment pas la Terre, que nous regardons ici comme dépourvue de mouvement de rotation. A mesure que nous nous éloignons dans l'espace pour rechercher cette cause, la force centrifuge devient de plus en plus grande. Notre théorie ressemble au débiteur

qui recule constamment l'échéance, et ne s'aperçoit pas que sa dette devient en même temps plus lourde. Elle reporte à l'infini la cause cherchée en se contentant de constater que les lois de la nature — relations entre les parties contiguës de l'Univers — se trouvent partout satisfaites.

Peut-on imaginer un moyen pour échapper à cette obligation ? Notre nouvelle loi de la gravitation admet qu'un mouvement rapide du corps attirant modifie le champ de force. Si la Terre ne tourne pas, les étoiles, au contraire, doivent tourner autour d'elle avec des vitesses effrayantes. Ne peuvent-elles pas, en raison de ces vitesses considérables, produire par gravitation sur la Terre le champ de force que nous décrivons comme un champ de force centrifuge ? Ce serait là une véritable élimination de la rotation absolue que d'attribuer tous les effets observables indifféremment à la rotation de la Terre, les étoiles étant fixes, ou à la révolution des étoiles, la Terre restant au repos ; nous n'aurions plus à compter qu'avec la rotation relative. Il me semble douteux que l'on puisse arriver à se persuader que les étoiles soient pour quelque chose dans le phénomène. Nous ne pouvons croire que la suppression des corps célestes pourrait bouleverser le compas gyrostatique. En tout cas, le calcul montre que la force centrifuge ne saurait être attribuée au mouvement de toutes les étoiles connues, si éloignées soient-elles.

Nous sommes donc obligés de renoncer à cette idée que les indices de la rotation terrestre — bourrelet équatorial, phénomènes gyrostatiques, etc. — sont dus à une rotation par rapport à un genre de matière connu. Le philosophe qui persiste à soutenir qu'on ne peut concevoir une rotation qui ne soit pas relative à de la matière, ne manquera pas de répondre que cette rotation se fait par rapport à une sorte de matière qu'il reste à découvrir. Si nous devons beaucoup jusqu'ici aux hypothèses philosophiques pour le développement de la théorie c'est que ces hypothèses se rapportaient à des choses que nous connaissions ; l'expérience vint du reste les confirmer. En tant que physicien nous ne pouvons attacher la même importance au nouveau problème qui se pose. Ce n'est pas que nous en contestions l'intérêt, mais il est en dehors de notre champ d'investigations. La physique demande à son schéma de la nature quelque chose de plus que la vérité ; c'est une certaine qualité que nous pouvons

appeler la convergence. La loi de la conservation de l'énergie n'est rigoureuse qu'autant qu'on l'applique à l'Univers entier ; mais ce qui fait sa valeur physique c'est qu'elle est vraie d'une manière très approchée pour un système limité même très restreint. La physique est une science exacte parce que ses problèmes, dans leurs parties essentielles, sont limités par de petits nombres de conditions ; elle nous conduit à la vérité avec un degré d'approximation sans cesse croissant à mesure que son champ d'action s'élargit. Les approximations de la physique forment une série convergente. L'Histoire est au contraire une science qui n'a pas ce caractère ; bien souvent on peut la comparer à une série divergente ; on ne peut compter sur aucune approximation dans ses prédictions tant que les bases sur lesquelles elles s'appuient ne comprennent pas le dernier terme de la suite infinie des données. La physique, si elle veut conserver ses avantages, ne doit pas abandonner la méthode qui lui est propre ; elle doit continuer à formuler des lois qui sont vraies d'une manière très approchée pour le connu borné que nous révèlent nos sens, et les étendre à l'inconnu. La relativité de la rotation n'a pas ce degré d'approximation pour les données de nos sens ; elle peut cependant être vraie si l'on fait intervenir l'inconnu aussi bien que le connu.

On peut appliquer à l'accélération les mêmes considérations qu'à la rotation ; la difficulté est pourtant moins frappante. Nous pouvons, si nous le voulons, attribuer au Soleil une accélération arbitraire quelconque en la contrebalançant par l'introduction d'un champ de gravitation uniforme. A cause de ce champ les autres étoiles se déplaceront avec la même accélération et aucun phénomène ne se trouvera modifié. Mais alors il semble nécessaire de rechercher la cause de ce champ. On ne peut l'attribuer à la gravitation des étoiles. La seule ressource qui nous reste pour la recherche de cette cause, c'est de nous enfoncer de plus en plus dans les profondeurs de l'infini ; mais plus nous nous enfonçons plus grande doit être la masse attirante nécessaire à l'explication. D'autre part, l'accélération absolue de la Terre est loin de s'imposer à notre attention comme sa rotation absolue (1).

(1) Pour déterminer même grossièrement la valeur de l'accélération abso-

Nous avons vaguement conscience d'une difficulté dans ces résultats ; mais si nous regardons la chose de près, la difficulté ne paraît pas très sérieuse. La théorie de la relativité, telle que nous la comprenons, affirme que nos divisions de l'espace et du temps sont introduites par l'observateur et qu'elles sont complètement indépendantes des lois de la nature, que par suite les grandeurs que l'on rencontre couramment en physique telles que longueur, durée, masse, force, etc., n'ont pas de signification absolue. Mais jamais nous n'avons nié l'existence de propriétés de l'Univers possédant une signification absolue et, en fait, nous avons passé beaucoup de temps à rechercher de telles propriétés. Les géodésiques, ou lignes d'Univers naturelles, ont, nous l'avons vu, une signification absolue ; il est possible, dans une région limitée de l'Univers, de choisir le mode de division de l'espace et du temps de telle sorte que toutes les géodésiques deviennent à très peu près des lignes droites. Le système choisi peut être dit système « naturel » pour la région considérée bien que l'espace et le temps correspondants ne soient pas ceux que l'on adopte en général dans la pratique ; ce sont, par exemple, l'espace et le temps des habitants du projectile de Jules Verne et non pas ceux du sur-observateur de Newton. Un pareil système est susceptible d'une définition absolue, mais il n'est pas défini par rapport au mouvement uniforme. La rotation terrestre déterminée par le pendule de Foucault est une rotation rapportée à ce système naturel. Il faudrait que nous ayons mal compris notre propre théorie de la relativité pour penser qu'il y a quelque chose d'inadmissible dans l'existence d'une rotation absolue au sens précédent.

Les particules matérielles et les géodésiques sont deux éléments de la structure absolue de l'Univers ; une rotation par rapport à une structure géodésique présente, semble-t-il, une analogie complète avec une vitesse par rapport à de la matière. Il y a pourtant un caractère assez frappant : la rotation paraît

lue de la Terre, il nous faudrait avoir une connaissance parfaite des causes perturbatrices apportées par l'ensemble de la matière contenue dans l'Univers. Pareille connaissance serait nécessaire pour déterminer d'une manière *exacte* sa rotation absolue ; mais la matière totale dont nous pouvons présumer l'existence aurait un effet si faible que nous pouvons admettre l'identité presque complète de la rotation absolue et de celle que donne l'expérience.

relative non seulement à une structure géodésique locale mais à un système universel plus général, alors qu'il est nécessaire de spécifier d'une manière précise la matière par rapport à laquelle on mesure la vitesse. Il est vrai que c'est là en grande partie une question de degré de précision admis respectivement dans la détermination des vitesses et dans celle des rotations. Si, pour la vitesse d'une particule β, peu nous importe une erreur de 10.000 km./sec., il est inutile de spécifier d'une manière précise l'étoile ou la planète par rapport à laquelle est comptée cette vitesse. La vitesse angulaire (locale) de la Lune est parfois donnée avec 14 chiffres significatifs ; il me paraît douteux qu'un système universel soit assez bien défini pour supporter un pareil degré de précision. Il y a sans aucun doute une continuité bien plus grande dans la structure géodésique des différentes régions de l'Univers que dans leur structure matérielle, mais la différence est de degré plutôt que de principe.

Je crois qu'ici, nous faussons compagnie à beaucoup de relativistes du continent qui donnent une place capitale à un principe connu sous le nom de *loi de causalité* — seules les choses susceptibles d'être observées réellement dépendent causalement les unes des autres. Il semble que ce principe est généralement interprété comme donnant à la matière une supériorité sur la structure géodésique dans l'énoncé des lois physiques, bien qu'il soit plutôt difficile de voir comment une distribution de matière peut passer pour mieux observable que le champ de force qui l'entoure, champ qui nous donne la connaissance de cette distribution. Le principe lui-même est discutable ; ce qui est observable pour nous est déterminé par l'intervention de notre propre structure et la loi de causalité semble imposer nos propres limites au jeu libre des entités que contient le monde extérieur. Dans ce Livre, nous ne perdons de vue à aucun moment la tradition des Faraday et des Maxwell ; la matière et l'électricité ne sont pour nous que des points singuliers dans un champ de force, la nature manifestant surtout son activité dans les espaces intermédiaires que nous considérons comme vides.

Le système de coordonnées universel mais mal défini auquel nous rapportons la rotation est appelé le *système d'inertie*. Il est nettement défini dans l'espace-temps euclidien éloigné de toute matière. Dans la région ondulée et pleine de rides correspon-

dant à l'Univers stellaire, sa notion perd toute netteté. Ce n'est plus qu'un contour grossier, arbitraire dans une certaine mesure, mais possédant le caractère général indiqué. La raison de cette expression de système d'inertie est intéressante à connaître. Rien ne nous empêche de nous servir d'un système de coordonnées entièrement différent du système d'inertie (par exemple des axes tournants) ; nous avons vu qu'il y a en fin de compte une dette à payer si nous voulons connaître la cause d'un champ de force centrifuge d'origine inconnue. Est-ce à dire qu'il n'y a plus rien à payer quand on emploie le système d'inertie ? Dans ce dernier cas il n'y a plus à l'infini ni champ de gravitation, ni force centrifuge ; mais il y a toujours l'inertie qui est de la même nature. On ne peut songer à créer une distinction entre force et inertie sous prétexte que l'une a une cause et que l'autre n'en a pas. Ce n'est pas parce que nous transformons toute notre dette en inertie pure que nous serons plus solvables. La dette est inévitable quel que soit le système de coordonnées utilisé ; nous avons tout juste la liberté de choisir la forme qu'elle peut prendre.

Cette dette est, après tout, bien inoffensive. A l'infini nous avons les géodésiques absolues de l'espace et nous avons notre propre système de coordonnées tracé arbitrairement. La relation des géodésiques au système de coordonnées nous apprend si nos axes tournent ou non ; théoriquement c'est cette relation que l'on détermine quand on mesure une rotation dite « absolue ». On ne pourrait raisonnablement s'attendre à ne rencontrer aucune relation que l'on puisse déterminer. D'ailleurs, une translation uniforme ne modifie pas la relation des géodésiques au système de coordonnées — si primitivement ces géodésiques étaient des droites, elles resteront des droites — une translation uniforme ne peut donc se mesurer que par rapport à de la matière.

Nous avons supposé que les conditions rencontrées dans les régions éloignées de l'espace mais encore accessibles à l'observation peuvent être extrapolées à l'infini, et qu'il y a encore des lignes d'Univers naturelles bien définies loin de toute action de la matière. Des objections à cette manière de voir peuvent naître dans certains esprits. On peut se dire que si la matière influe sur la forme des géodésiques elle peut fort bien être la cause

unique de cette forme ; par suite, une région extérieure au champ d'action de la matière pourrait ne pas avoir de géodésiques et par suite pas d'intervalles ; tous les potentiels seraient alors nécessairement nuls. Cette objection peut revêtir plusieurs formes différentes, mais le fond de l'argument paraît être que nous ne pouvons accepter sans réserves l'affirmation que certaines conditions valables dans les régions de l'Univers accessibles à l'observation peuvent être étendues aux régions inaccessibles jusqu'à l'infini, comme si elles y avaient leurs sources ; on préfère trouver une explication du système d'inertie dans les propriétés rencontrées à distance finie.

Si tous les intervalles s'annulaient, l'espace-temps se réduirait à un point ; il n'y aurait donc plus ni espace, ni temps, ni inertie, ni rien. Ainsi toute cause créatrice d'intervalles et de géodésiques doit, pour ainsi dire, agrandir l'Univers. Nous pouvons nous imaginer l'Univers étendu comme une feuille plane ; mais alors la cause de cette extension — la cause des intervalles — est rejetée en dehors des limites de l'espace et du temps, c'est-à-dire à l'infini. Tel est l'argument que l'on objecte mais l'auteur ne regarde pas cette objection comme bien puissante. Nous pouvons également supposer l'Univers arrondi comme un ballon que l'on gonfle. Dans ce cas, la force qui contraint l'Univers à rester tendu, n'est pas rejetée à l'infini loin du domaine de l'investigation expérimentale ; elle agit en tout point de l'espace-temps, courbant l'Univers comme une sphère. Nous arrivons ainsi à la notion que l'espace-temps peut avoir une courbure fondamentale indépendante des dénivellations minuscules qu'introduit la matière dont l'existence nous est connue.

Il n'est pas nécessaire pour expliquer cette courbure, d'aller chercher (par analogie avec le cas du ballon) quelque pression dans un Univers à cinq dimensions. Nous devons simplement y voir une tendance innée de l'espace-temps à quatre dimensions à se courber. On peut se demander ce que nous gagnons à substituer une courbure naturelle de l'espace-temps à la faculté de déploiement qui correspondait au système d'inertie. En tant qu'explication, rien. Mais il y a cette différence que la théorie du système d'inertie peut maintenant être rattachée à la loi différentielle de gravitation au lieu d'en être indépendante et de lui former un complément.

Nous n'oublierons pas qu'une des conditions qui nous ont permis d'établir la loi de gravitation était que l'espace-temps euclidien devait s'y conformer. Mais si l'espace-temps doit avoir une légère courbure naturelle indépendante de la matière, cette condition se trouve maintenant altérée. Il est aisé de trouver la modification corrélative de la loi (1). Elle devra contenir une constante supplémentaire, et jusqu'ici inconnue, qui fixe les dimensions de l'Univers.

L'espace sphérique n'est pas très facile à concevoir. Nous devons songer aux propriétés de la surface sphérique à deux dimensions et de plus essayer d'imaginer quelque chose de semblable dans le cas de l'espace à trois dimensions. Supposons-nous en un certain point et construisons une série de sphères ayant successivement des rayons de plus en plus grands. L'aire d'une sphère de rayon r est proportionnelle à r^2, mais dans un espace sphérique les aires des sphères les plus éloignées ne répondent plus à cette loi et ont des valeurs inférieures à celles qui en résulteraient. Il n'y a pas au loin autant de place que nous nous attendions à en trouver. Nous atteignons enfin une sphère d'aire maximum et telle que les sphères suivantes ont des aires qui commencent à décroître (2). La dernière de toutes ces sphères se réduit à un point — nos antipodes. N'y a-t-il plus rien au delà ? N'y a-t-il pas là pour nous arrêter quelque barrière infranchissable ? Non, il n'y a rien au-delà et pourtant il n'y a pas non plus de limite. Sur la surface terrestre, de même, il n'y a rien au delà de nos antipodes et aucune limite ne s'y trouve pour nous arrêter.

La difficulté provient de ce que nous essayons de nous représenter cet Univers sphérique en imaginant comment il nous apparaîtrait à nous, et à nos instruments de mesure. Nous ne connaissons rien que nous puissions lui comparer et c'est pourquoi il nous semble paradoxal. Mais si nous pouvions nous libérer de notre point de vue personnel et regarder la sphéricité de l'Univers comme un fait extérieur à nous, nous le trouverions simple et naturel, et aussi vraisemblable que tous ceux que nous connaissons.

(1) Appendice. Note 14.

(2) L'aire doit, bien entendu, être déterminée par un procédé physique de mesure.

Dans un pareil Univers, aucune difficulté au sujet de cette dette sans cesse accrue que l'on doit payer à la limite : il n'y a plus de limite. La force centrifuge croît jusqu'à ce qu'on ait atteint la sphère d'aire maximum ; puis, obéissant toujours à la loi de gravitation elle diminue jusqu'à s'annuler aux antipodes. La dette se trouve payée automatiquement.

Nous ne devons pas nous exagérer l'importance du pas que nous avons franchi grâce à cette modification de la théorie. Une constante nouvelle a été introduite dans la loi de gravitation ; elle donne à l'Univers une étendue déterminée. Il n'y avait rien avant pour indiquer la grandeur de l'Univers ; on se le donnait *a priori* comme infini. Si nous lui accordons une étendue suffisante pour que les intervalles ne puissent devenir invariablement nuls, nous pourrons définir en tout lieu les géodésiques et par suite déterminer un système d'inertie.

L'espace-temps sphérique — c'est-à-dire un continuum à quatre dimensions d'espace et de temps imaginaire formant une surface sphérique dans un espace à cinq dimensions — a fait l'objet d'une étude approfondie du Prof. de Sitter. Si l'on prend le temps réel, l'Univers est sphérique dans ses dimensions d'espace mais il s'évase comme un hyperboloïde vers les infinis positif et négatif du temps. Ceci, heureusement, nous épargne la nécessité de supposer qu'à force d'avancer dans le temps nous finirons par retrouver un instant déjà écoulé pour nous ! L'Histoire ne se répète pas. Dans les dimensions d'espace pur, au contraire, notre progression ininterrompue finira par nous faire revenir au point de départ. Ceci aurait des résultats physiques intéressants et nous verrons tout à l'heure qu'Einstein a bâti une théorie de l'Univers où l'on pouvait effectivement revenir au point de départ ; dans la théorie de de Sitter cette conséquence n'est qu'une abstraction car, comme il le dit lui-même, « tous les phénomènes paradoxaux ne peuvent se présenter qu'après la fin ou avant le début de l'éternité ».

La raison en est la suivante. A cause de la courbure suivant la dimension de temps, plus nous nous éloignons de notre point de départ, plus le temps s'écoule vite ; en d'autres termes, si nous voulons, les phénomènes naturels de même que les horloges naturelles sont de plus en plus lents. Finalement

on en arrivera à l'état décrit par Mr. H.-G. Wells dans « *The new accelerator* ».

Quand nous arrivons à mi-chemin des antipodes, le temps s'arrête complètement. Comme au thé de Mad Hatter où il est toujours six heures, rien ne peut arriver, si longtemps que nous attendions. Impossible d'aller plus loin car tout en ce point, y compris la lumière, est condamné à un repos complet. Tout ce qui se trouve au delà nous est à jamais fermé par cette barrière du temps ; impossible à la lumière de faire son tour du Monde !

Voilà ce qui arrive quand on voit l'Univers d'un certain point ; mais si, attirés par l'agréable perspective de nous reposer sans cesse, nous allions visiter ce lieu de calme et de paix, nous serions bien désappointés car nous y trouverions une nature plus active que jamais. Nous pensions que le temps y était arrêté ; il marchait en réalité à son allure normale comme s'il suivait une cinquième dimension dont nous n'aurions pas connaissance. Jetant un regard en arrière sur notre demeure primitive, il nous semblerait alors que le temps y est arrêté. Le temps en ces deux lieux progresse suivant des directions perpendiculaires entre elles de sorte que si nous nous trouvons en un de ces points, le cours du temps là où nous sommes n'a aucune relation avec le temps que nous percevons à l'autre point. Le lecteur verra facilement qu'un être à deux dimensions appliqué sur une surface sphérique et n'ayant aucune notion d'une troisième dimension, perdra, pour ainsi dire, une de ses dimensions quand il observera des objets situés à 90° de lui. Il retrouve cette dimension perdue s'il se rend au lieu observé et s'adapte lui-même aux deux dimensions qui s'y trouvaient.

Il peut sembler que l'architecture de cet édifice singulier qui constitue l'Univers ait bien peu de rapports avec nos problèmes pratiques. Mais est-ce bien certain ? Ne sommes-nous pas capables d'observer réellement le ralentissement des phénomènes lointains de la nature ? Ce que nous connaissons de plus éloigné, ce sont les nébuleuses spirales dont les distances par rapport à nous sont peut-être de l'ordre d'un million d'années de lumière. Si les phénomènes naturels y sont ralentis, la vibration d'un atome est plus lente ; ses lignes spectrales caractéristiques apparaîtront donc déplacées vers le rouge. Nous

interpréterons en général ce résultat comme effet Doppler dû à un éloignement de la nébuleuse. Les mouvements dans la direction radiale d'un grand nombre de nébuleuses ont été déterminés, en particulier par le Prof. Slipher. Les données ne sont pas aussi nombreuses que nous aurions pu le souhaiter mais sans aucun doute ce sont les grandes vitesses d'éloignement qui sont prépondérantes. Ceci peut être envisagé comme un effet naturel de l'évolution du Monde ; mais il se peut également que l'interprétation du déplacement spectral en tant que conséquence d'une vitesse d'éloignement soit erronée ; l'effet serait alors dû au ralentissement des vibrations atomiques prédit par la théorie de de Sitter.

Le Prof. Einstein préfère une autre théorie de la courbure de l'espace-temps. Son Univers, à lui, est cylindrique — courbe suivant l'espace à trois dimensions mais rectiligne suivant le temps. Le temps n'est plus courbe ; le ralentissement des phénomènes à grande distance de l'observateur disparaît totalement, et, avec lui, le léger appui expérimental apporté à la théorie par l'observation des nébuleuses spirales. Plus de barrière de repos éternel : un rayon lumineux peut faire le tour complet de l'Univers.

De grossières évaluations des dimensions de l'Univers ont été faites suivant différentes méthodes dans l'hypothèse de de Sitter et dans celle d'Einstein ; dans les deux cas le rayon est, pense-t-on, de l'ordre de 10^{13} fois la distance du Soleil à la Terre. Un rayon lumineux issu du Soleil mettrait environ 1.000 millions d'années à faire le tour de l'Univers ; après leur voyage, les rayons viendraient de nouveau converger en leur point de départ, pour diverger ensuite dans un nouveau circuit. Le lieu de convergence de ces rayons aurait toutes les propriétés d'un Soleil réel au point de vue lumineux et calorifique ; seulement, ce serait un Soleil immatériel. Ainsi, correspondant à notre Soleil, nous pourrions voir une série de soleils fantômes occupant les positions que le Soleil lui-même occupait il y a 1.000, 2.000, 3.000, etc., millions d'années si (ce qui semble probable) l'on suppose que le Soleil était déjà lumineux en ces temps reculés.

Il est assez amusant de penser que les différents phénomènes de l'Univers sidéral peuvent laisser là où ils ont eu lieu des

empreintes qui se reproduisent périodiquement. Peut-être une ou plusieurs des nombreuses nébuleuses spirales que nous apercevons ne sont-elles en réalité que des fantômes de notre propre système stellaire ! Peut-être aussi n'y a-t-il qu'une certaine proportion d'étoiles matérielles, les autres n'étant que des revenants optiques qui viennent hanter leurs anciennes demeures. Il n'est guère vraisemblable pourtant que les rayons lumineux après leur long voyage viennent converger en un point aussi exactement que le prévoit la théorie. Les légères déviations dues aux différents champs de gravitation rencontrés sur leur parcours suffiraient pour diminuer l'éclat du foyer de convergence. De plus, il est fort probable que la lumière serait peu à peu absorbée ou diffusée par la matière en suspension dans l'espace.

Une thèse quelquefois soutenue c'est que le retour de l'onde lumineuse à son point de départ est dû à la force de gravitation, la matière répandue dans l'Univers étant suffisante pour permettre un trajet fermé de la lumière. Nous n'avons aucune objection de principe à élever contre cette théorie ; nous doutons pourtant de son exactitude. La lumière peut parfaitement revenir à son point de départ dans un Univers dépourvu de gravitation. Nous pouvons enrouler un espace-temps plan suivant un cylindre et en souder les bords ; sa géométrie serait euclidienne et il n'y aurait pas de gravitation ; néanmoins un rayon lumineux peut fort bien faire le tour du cylindre et revenir au point de l'espace d'où il est parti. De même dans le type de cylindre plus complexe d'Einstein (courbé suivant trois dimensions et rectiligne suivant une quatrième) il paraît vraisemblable que le retour de la lumière soit dû autant au degré de connexion de l'espace qu'aux propriétés non euclidiennes qui résultent de l'existence du champ de gravitation.

Dans l'hypothèse de l'Univers cylindrique d'Einstein, il faut admettre l'existence de quantités énormes de matière (ce qui n'est pas nécessaire dans la théorie de de Sitter), beaucoup plus considérables que celles que nous ont révélées nos télescopes. Cet excès de matière peut être distribué ou bien sous la forme d'étoiles lointaines et de galaxies situées hors des limites de notre champ de vision, ou bien elle peut être uniformément répandue dans l'espace, sa faible densité la faisant échapper à nos investiga-

tions. Il y a une relation déterminée entre la densité moyenne de la matière et le rayon de l'Univers ; plus ce rayon est grand, plus petite doit être la densité moyenne.

On peut faire à cette théorie deux objections. Tout d'abord nous avons rétabli l'espace et le temps absolus pour les phénomènes à l'échelle des grandeurs cosmiques. Le fantôme d'une étoile apparaît au lieu qu'occupait l'étoile quelques millions d'années auparavant ; une certaine distance bien définie sépare ce fantôme de la position actuelle de l'étoile — cette distance provenant du mouvement absolu de l'étoile dans l'intervalle (1). L'Univers pris dans son ensemble a une direction suivant laquelle il n'est pas courbe ; cette direction permet de distinguer un temps absolu de l'espace pur. La relativité n'est donc plus qu'un phénomène local ; bien que ce fait n'empêche pas la théorie que nous avons exposée jusqu'ici de se trouver amplement satisfaite, nous sommes portés à regarder avec quelque défiance cette limitation. Nous avons cependant déjà dit que la théorie de la relativité avait pour rôle non pas de nier la possibilité d'un temps absolu, mais de lui refuser toute intervention dans notre science expérimentale actuelle ; nous n'avons rien à modifier si la conception du temps absolu revêt une nouvelle forme dans la théorie de phénomènes d'un ordre de grandeur suffisant pour compter dans l'évolution du Monde, phénomènes que nulle science expérimentale n'a pu atteindre jusqu'à présent. De même que tout observateur limité sépare à sa manière l'espace et le temps, un être aussi grand que l'Univers pourrait opérer sur l'espace-temps une division particulière qui lui soit naturelle. C'est le temps de cet être énorme qui a l'honneur de se voir qualifier ici d' « absolu ».

En second lieu, la loi de gravitation modifiée comporte une constante nouvelle qui dépend de la quantité totale de matière contenue dans l'Univers ; ou bien inversement, cette quantité totale de matière est déterminée par la loi de gravitation. Cela semble plutôt difficile à admettre — c'est même entièrement inadmissible sans une explication plausible du rapport qui existe

(1) Le fantôme ne se forme pas là où l'étoile se trouve actuellement. Deux étoiles voisines au moment où la lumière les quitte donneront deux fantômes voisins bien qu'à l'époque où ceux-ci seront observables, les étoiles puissent être très éloignées l'une de l'autre.

entre l'une et l'autre. Nous voyons bien que, une fois fixée la constante de la loi de gravitation, il y a une limite supérieure à la quantité de matière possible ; plus on ajoute de matière dans les régions éloignées, plus l'espace s'incurve de sorte que finalement il se ferme ; on ne peut plus alors ajouter de matière car il n'y a plus de place et il faut revenir aux régions qui en contiennent déjà. Mais il semble que rien ne puisse s'opposer à une lacune de la matière, qui aurait pour effet d'empêcher l'espace de se fermer. Il semble nécessaire qu'il y ait quelque mécanisme grâce auquel ou bien la gravitation créerait de la matière ou bien l'ensemble de la matière de l'Univers interviendrait pour déterminer la loi de gravitation.

Ce point semble plutôt embarrassant à l'auteur ; il est, au contraire, fort bien vu des philosophes de l'école de Mach. On en peut tirer en effet cette conclusion que l'étendue finie de l'espace et du temps dépend de la quantité totale de matière distribuée dans l'Univers — en partie par son effet direct sur la courbure, et en partie par son influence sur la constante de la loi de gravitation. Plus il y a de matière, plus il se crée d'espace pour la contenir, et s'il n'y avait pas de matière du tout, l'Univers se réduirait à un point.

Dans la philosophie de Mach, un Univers sans *matière* est inconcevable ; la matière n'est pas seulement le corps d'épreuve nécessaire pour mettre en évidence les propriétés du je ne sais quoi qui se trouvait là avant qu'elle y soit elle-même, et qui n'a de signification physique que par son intermédiaire ; elle est un facteur essentiel dans l'origine des propriétés que la matière est susceptible de manifester. L'inertie, par exemple, ne saurait apparaître par la simple introduction d'un corps d'épreuve dans l'Univers ; la présence d'une autre quantité de matière est en quelque sorte nécessaire pour la produire. On comprendra avec quel empressement cette philosophie reçut la théorie d'après laquelle l'espace et le système d'inertie naissent en même temps que la matière, et grandissent avec elle. Comme les lois de l'inertie ne sont qu'une conséquence de la loi de gravitation, on a pu résumer — peut-être inconsciemment — la philosophie de Mach dans cet énoncé profond : « Si l'Univers ne contenait pas de matière, la loi de gravitation n'existerait pas » !

Sans doute, un Univers sans matière où nul événement ne

pourrait jamais survenir, perdrait tout intérêt ; on pourrait même lui refuser le droit de passer pour un Univers. Mais un Univers uniformément rempli de matière serait tout aussi monotone et inutile ; il semble donc qu'on ait aussi peu de raison de nier la possibilité du premier cas que d'accepter celle du second.

La discussion peut être résumée comme il suit : — dans un espace dépourvu de tout caractère absolu, une rotation absolue a aussi peu de sens qu'une translation absolue ; par suite l'existence de cette grandeur déterminée expérimentalement que l'on identifie le plus souvent avec la rotation absolue, demande une explication. Nous avons remarqué page 51 qu'il serait difficile d'imaginer un schéma de l'Univers dans lequel le mouvement uniforme n'aurait aucun sens tandis que le mouvement non uniforme en aurait un ; c'est pourtant à la conception d'un tel Univers que nous avons abouti — un « plein » dont les caractères absolus sont les intervalles et les géodésiques. Dans une région limitée, ce « plein » nous offre un système de référence naturel qui permet de mesurer une accélération ou une rotation (mais non une vitesse) susceptibles de définitions absolues. Dans le cas d'une rotation, les distorsions locales du système de référence ont relativement très peu d'importance, ce qui explique pourquoi en pratique la rotation semble rapportée à un système d'inertie universel.

Ainsi, la rotation absolue n'est pas l'indice d'un défaut dans la logique de la théorie que nous avons exposée ; il est donc inutile d'apporter quelque modification à nos vues. Peut-être, tout au plus, existe-t-il une théorie de la relativité un peu plus générale dans laquelle le « plein » dont nous avons admis l'existence doit être regardé lui-même comme une abstraction des relations de la matière répandue à travers tout l'Univers, son existence dépendant essentiellement de cette matière. Cette théorie semble donner sans nécessité à la matière une importance exagérée. Elle peut être vraie ; mais nous n'en verrons pas la nécessité tant que l'expérience ne sera pas venue la confirmer. Einstein avait dans l'idée quelque théorie de ce genre quand il imagina son hypothèse de l'espace-temps cylindrique, puisque cet espace-temps ne peut exister s'il n'y a pas de la matière pour le tenir déployé. Nous sommes libres maintenant d'admettre que l'hypothèse d'une planéité parfaite de l'espace-temps

dans les régions éloignées de l'espace est entièrement arbitraire, et il n'existe aucune justification qui nous permette de la soutenir. Une faible courbure est possible à la fois logiquement et expérimentalement. Les arguments que l'on a pu proposer jusqu'ici dans l'une et l'autre théorie, n'ont guère que la valeur de préjugés qui se dissiperaient du jour où les investigations expérimentales ou théoriques aboutiraient à quelque résultat capital venant trancher la question. La théorie électromagnétique de Weyl, discutée dans le chapitre suivant, assigne à la courbure de l'espace une fonction bien définie ; ceci modifie considérablement l'aspect de la question. Nous ne sommes pas allés encore assez loin dans cette voie pour pouvoir donner une opinion définitive ; néanmoins il semble que la conception de l'espace-temps cylindrique soit favorisée par le nouveau développement de la théorie.

On peut se demander de quel droit la théorie d'Einstein — du moins telle qu'elle a été interprétée dans cet ouvrage — peut s'intituler une Théorie de la Relativité. Peut-être n'a-t-elle pas tous les caractères que nous avons pu associer à ce titre ; néanmoins, le lecteur qui nous a suivi jusqu'ici reconnaîtra que notre recherche d'un Univers absolu a été à chaque pas guidée par la notion de la relativité des mesures physiques. On peut nous objecter qu'il ne faut pas regarder les géodésiques comme des entités fondamentales ; qu'une géodésique n'a aucun sens en elle-même ; que ce que nous faisons intervenir en réalité, c'est le rapport qu'il y a entre la particule qui décrit la géodésique et tout le reste de la matière contenue dans l'Univers ; qu'on ne peut concevoir la géodésique sans cette matière. A ces objections nous répondrions : « Votre particule matérielle n'est pas non plus fondamentale ; elle n'a aucun sens en elle-même ; ce que vous faites intervenir en réalité, c'est son « champ » — c'est-à-dire la relation qui existe entre les géodésiques qui l'environnent et l'ensemble des autres géodésiques contenues dans l'Univers — on ne peut concevoir la matière sans son champ ». Tout ceci n'est qu'un enchevêtrement de relations ; la théorie physique part des éléments les plus simples, la théorie philosophique de ceux qui nous sont le plus familiers. Peut-être atteindront-elles le même but ; mais leurs méthodes sont souvent dans le désaccord le plus complet.

CHAPITRE XI

Electricité et Gravitation.

13. Non habebis in sacculo diversa pondera majus et minus.
14. Nec erit in domo tua modius major et minor.
15. Pondus habebis justum et verum et modius æqualis et verus erit tibi (1).

(Deutéronome, Chap. 25).

La théorie de la relativité déduit de principes géométriques l'existence de la gravitation et les lois mécaniques auxquelles obéit la matière. Cette déduction de la mécanique à partir de la géométrie a pu se faire non pas par l'addition d'un certain nombre d'hypothèses arbitraires mais au contraire par la suppression de certains axiomes non nécessaires, de sorte qu'un géomètre tel que Riemann aurait fort bien pu prévoir les caractères essentiels de l'Univers réel. Cependant la nature nous a réservé une grosse surprise — l'électricité.

Ce n'est pas que les phénomènes électriques ne s'adaptent pas à la théorie de la relativité puisque, historiquement, c'est à eux qu'elle a dû de prendre son essor. Mais nous ne pourrons nous montrer satisfaits tant que ne sera pas né un accord plus étroit entre les propriétés gravitationnelles et électriques de l'Univers. L'électron, qui paraît être la particule ultime de la matière, est un point singulier aussi bien du champ de gravitation que du champ électrique. Comment peut-on relier ces deux faits ? Le champ de gravitation, c'est l'expression d'un certain état

(1) Tu n'auras pas dans ton sac deux sortes de poids, un gros et un petit.
Tu n'auras pas dans ta maison deux sortes de mesures, une grande et une petite.
Mais tu auras un poids juste et véritable, une mesure égale et fidèle.

de l'Univers qui se manifeste également dans la géométrie naturelle que nous fait connaître la mesure ; le champ électrique, c'est aussi l'expression d'un état de l'Univers mais jusqu'ici personne n'a pu savoir s'il avait ou non un rapport avec la géométrie naturelle. Ne peut-il pas y avoir encore quelque axiome non nécessaire à écarter pour obtenir une géométrie plus générale où auront leur place à la fois le champ de gravitation et le champ électrique ?

Il *existe* une hypothèse arbitraire dans la géométrie que nous avons exposée jusqu'ici, et le moment est venu d'en faire la remarque. Tout ce que nous avons dit a été basé sur la notion de l' « intervalle » ; c'est, nous l'avons vu, une quantité que peuvent mesurer d'une manière absolue pour arriver à un résultat unique tous les observateurs quels qu'ils soient, et quels que soient leur mouvement et le système de coordonnées qu'ils emploient. Ceci suppose qu'ils ont tous des étalons de mesure identiques — règles graduées et horloges. Mais si A est en mouvement par rapport à B et veut passer ses étalons à B pour contrôler cette identité, il doit arrêter leur mouvement ; ce qui, en pratique, signifie qu'il doit leur faire subir un bombardement moléculaire jusqu'à leur arrêt complet. Est-on en droit d'admettre que ce traitement n'a causé aucune modification de l'étalon ? Si A mesure le temps par la durée des vibrations d'un atome d'hydrogène, et l'espace par leur longueur d'onde, il est encore nécessaire pour la comparaison d'arrêter l'atome par un choc où entrent en jeu des forces électriques.

L'étalon de longueur en physique c'est la longueur d'une barre telle qu'elle était en 1799 quand elle fut déposée à Paris. Evidemment, jamais nous ne mesurerons directement un intervalle avec cette longueur ; il doit y avoir une chaîne ininterrompue d'échelons intermédiaires s'étendant à la manière d'une triangulation géodésique à travers l'espace et le temps, d'abord dans le passé de la règle divisée que nous utilisons actuellement dans notre mesure, ensuite parmi les étalons secondaires qui la séparent de l'étalon-type, enfin dans le passé de cet étalon suprême, c'est-à-dire dans l'histoire du mètre de Paris. Il se peut que ces échelons intermédiaires soient sans importance — que l'on arrive au même résultat quel que soit le chemin suivi pour atteindre l'étalon ; mais nous ne devons évidemment pas faire une pareille

hypothèse sans l'avoir longuement examinée. Nous devons construire notre géométrie de manière à impliquer l'existence des échelons intermédiaires et ne pas admettre *a priori* que la comparaison de l'intervalle avec l'étalon suprême a le caractère d'une action à distance.

Mesurer des intervalles de directions différentes en un point de l'espace-temps ne nécessite pas une comparaison avec un étalon éloigné. Le physicien qui veut décrire des phénomènes se passant au voisinage d'un point P, établit pour faire ses comparaisons d'intervalles : (1) un système de coordonnées ; (2) une unité de longueur (un étalon matériel) qu'il peut utiliser pour mesurer le temps si la vitesse de la lumière est prise égale à l'unité. A l'aide de ce système de référence il peut mesurer en fonction de son unité de longueur des intervalles très petits PP' ayant leur origine en P et une direction quelconque ; il résumera les résultats dans la formule fondamentale :

$$ds^2 = g_{11}dx_1{}^2 + g_{22}dx_2{}^2 + \dots\dots + 2g_{12}dx_1dx_2 + \dots\dots$$

Si maintenant il veut répéter les mêmes mesures autour d'un autre point Q, il doit de nouveau établir en ce point un système de coordonnées et choisir une unité de longueur. Il est tout naturel qu'il essaie de simplifier le problème en se servant de ce qu'il appelle la *même* unité de longueur en P et en Q, c'est-à-dire en transportant du premier point au second une certaine règle matérielle ou quelque appareil équivalent. Si le chemin suivi par l'unité pour aller de P en Q n'importe pas, autrement dit si des copies de cette unité empruntant des chemins différents sont identiques les unes aux autres à leur arrivée en Q, la méthode ne présente aucune ambiguïté. C'est une question de pure métaphysique de savoir si l'unité en Q telle que nous venons de la définir est réellement la même qu'en P. Si au contraire nos copies de l'unité ne sont plus d'accord à leur arrivée en Q, il n'y a pas moyen d'identifier sans ambiguïté l'unité en Q avec l'unité en P. Supposons que P soit un événement qui ait lieu à Cambridge le 1er Mars, et Q un autre événement à Londres le 1er Mai ; nous cherchons s'il est possible qu'il y ait une différence dans les mesures faites avec notre étalon à Londres le 1er Mai, suivant que cet étalon aura quitté Cambridge le 1er Mars et sera resté jusqu'au 1er Mai à Londres, ou bien n'aura

quitté Cambridge pour se rendre à Londres que le 1er Mai. Au premier abord une telle différence ne semble guère probable ; mais les raisons qui nous font penser à cette possibilité seront exposées tout à l'heure. Si l'ambiguïté précédente existe réellement la seule méthode possible est de définir : (1) un système de coordonnées qui remplisse toute la portion de l'espace-temps que l'on ait à considérer ; (2) une unité d'intervalle que nous appellerons une « jauge », *en chaque point de l'espace-temps.* La géométrie de l'Univers rapportée à un tel système sera beaucoup plus compliquée que la géométrie de Riemann dont nous avons fait usage jusqu'ici ; nous verrons que non seulement il nous faudra déterminer les dix fonctions g, mais encore quatre autres fonctions de point qui ont, comme nous le verrons, une signification physique importante.

Naturellement, l'observateur simplifiera les choses en prenant en différents points ses jauges aussi égales que possible au point de vue des procédés ordinaires de comparaison. Mais il ne faut pas oublier que tant que la comparaison dépend de la route suivie, l'égalité rigoureuse n'est pas définissable ; nous admettrons donc que les étalons *exacts* sont définis indépendamment les uns des autres en chaque point.

C'est le problème déjà rencontré à propos des systèmes de coordonnées qui réapparaît de nouveau. Nous établissons des axes rectangulaires particuliers au voisinage d'un point P ; nous voulons faire des observations au voisinage d'un point Q éloigné de P. A quelles coordonnées devrons-nous rapporter ces observations ? La réponse toute naturelle c'est que nous devons utiliser les mêmes coordonnées qu'en P. Mais sauf dans le cas d'un espace euclidien aucun criterium ne nous permet d'affirmer que telles coordonnées en Q sont les *mêmes* que celles en P. Dans nombre de cas cette ambiguïté est trop insignifiante pour nous arrêter ; mais, en fait, la seule méthode rigoureuse est de définir un certain système de coordonnées s'étendant à travers tout l'espace, la forme exacte des lignes coordonnées restant nécessairement arbitraire. Il faut de plus, en chacune des mailles, établir une jauge dont la longueur exacte soit arbitrairement choisie. Ceci fait, il faut ensuite effectuer des mesures d'intervalles (c'est-à-dire utiliser les jauges). Nous relions ainsi les propriétés absolues de l'Univers à nos systèmes de mailles et de

jauges arbitraires. La mesure nous permet de déterminer les fonctions g et les nouvelles fonctions supplémentaires qui définissent la géométrie du système de référence choisi et qui en même temps contiennent en elles la géométrie absolue de l'Univers — le genre d'espace-temps de notre champ d'expérience.

Ayant fixé en chaque point une jauge-unité, nous pouvons parler sans qu'il en résulte la moindre ambiguïté de la variation de la longueur généralisée, c'est-à-dire de l'intervalle total d'une règle graduée qui se meut d'un point à un autre, la mesure de cette variation se faisant bien entendu par comparaison de la règle avec les différentes jauges-unités rencontrées sur son parcours. Soit une règle de longueur généralisée l en P et déplaçons-la successivement des quantités dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 ; soit λl l'accroissement total de sa longueur généralisée, exprimée en jauges-unités. La variation dépend autant de la différence des jauges aux deux points considérés que de la manière dont se comporte la règle pendant son déplacement ; mais il est impossible de séparer ces deux facteurs. Il est évident que λ ne dépend pas de l car la variation de longueur doit être proportionnelle à la longueur primitive — à moins toutefois qu'il soit dépourvu de sens de chercher à mesurer une longueur généralisée par une comparaison avec les jauges [1]. En outre λ ne dépendra pas non plus de l'orientation de la règle, en ses positions initiale et finale, car la longueur généralisée est indépendante de la direction (naturellement la longueur d'espace varie, mais il est déjà tenu compte de cette variation par l'intermédiaire des fonctions g). λ ne peut donc dépendre que des déplacement dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, ce qui nous permet d'écrire :

$$\lambda = k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_2 dx_2 + k_4 dx_4,$$

pourvu que les déplacements soient suffisamment petits. Les coefficients k_1, k_2, k_3, k_4, sont relatifs au voisinage immédiat de P et ils diffèrent en général d'un point à l'autre de l'espace.

Tout ce qui précède suppose que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel se font les déplacements dx_1, dx_2, dx_3, dx_4

[1] Nous ne voulons pas nous arrêter à cette idée que si le mètre étalon varie de telle sorte que sa longueur devient égale à deux mètres, chacun de ses centimètres deviendra égal à trois centimètres.

— en d'autres termes, l'ambiguïté provenant d'une mesure ayant emprunté des chemins différents disparaît à la limite quand ces chemins deviennent suffisamment courts. Cette hypothèse est parallèle à cette autre faite plus haut d'une manière implicite que l'intervalle total d'un arc de ligne d'Univers d'un point P à un point Q dépend bien de cette ligne et que l'on ne peut attacher un sens précis à l'intervalle qui sépare ces deux points sans spécifier le chemin suivi pour aller de l'un à l'autre, mais que néanmoins à la limite il existe un intervalle élémentaire bien défini entre P et Q quand ces points se rapprochent suffisamment l'un de l'autre.

Pour comprendre la signification des nouveaux coefficients k rappelons rapidement ce que représentent les fonctions g. Ce sont tout d'abord des quantités provenant des mesures expérimentales d'intervalles ; elles décrivent la géométrie du mode de division de l'espace-temps adopté par l'observateur. Comme conséquences, elles décrivent également le champ de force gravitationnelle, centrifuge, etc., que cet observateur perçoit autour de lui. Elles se rapportent à son système de coordonnées particulier ; en changeant ce système il peut modifier leurs valeurs mais pas tout à fait à son gré. De leurs valeurs peuvent être déduites des propriétés intrinsèques de l'Univers — le *genre* de l'espace-temps dans lequel ont lieu les phénomènes. De plus, elles remplissent une condition bien déterminée — la loi de gravitation — de sorte que tous les espaces-temps possibles mathématiquement et toutes les valeurs arbitraires des g ne se rencontrent pas nécessairement dans la nature.

Tout ceci s'applique également aux k en remplaçant les systèmes de coordonnées par les systèmes de jauges et la gravitation par quelque force inconnue actuellement. On peut les déterminer théoriquement par des mesures d'intervalles ; mais ils se manifestent à l'observateur d'une manière plus nette par cette propriété qu'ils ont de décrire un certain champ de force. Les k se rapportent au système de jauges arbitraire choisi par l'observateur ; cependant, celui-ci en modifiant son système de jauges ne peut à son gré faire varier les valeurs des k. Ces valeurs renferment des propriétés intrinsèques de l'Univers qui ne sont pas altérées par un changement quelconque du système de jauges. Nous pouvons de plus nous attendre à ce qu'elles obéissent

à quelque loi analogue à la loi de gravitation de sorte que toutes les valeurs arbitraires des k ne se rencontrent pas nécessairement dans la nature.

Il est clair que les k doivent se rapporter à un genre de phénomènes qui jusqu'ici n'est pas encore apparu dans notre analyse ; l'idée qui nous vient à l'esprit c'est qu'ils correspondent au champ électromagnétique. Cette hypothèse se trouve singulièrement affermie si nous voulons bien nous souvenir que le champ électromagnétique est en fait défini en chaque point quand on connaît les valeurs de quatre quantités, à savoir les trois composantes du potentiel vecteur électromagnétique et le potentiel scalaire électrostatique. C'est sûrement plus qu'une coïncidence que le physicien ait précisément besoin de quatre quantités supplémentaires pour déterminer l'état de l'Univers en un point de l'espace et que quatre quantités lui soient fournies par la suppression d'une restriction assez illogique de notre système géométrique de mesures naturelles.

[Le lecteur voudra bien m'excuser si je m'adresse plus spécialement aux physico-mathématiciens. Prenons les coordonnées rectangulaires non accélérées ordinaires x, y, z, t, et remplaçons k_1, k_2, k_3, k_4, par F, G, H, $-\Phi$; d'où :

$$\frac{dl}{l} = \lambda = \mathrm{F}dx + \mathrm{G}dy + \mathrm{H}dz - \Phi dt,$$

En intégrant :

$$\log\, l + \mathrm{C^{te}} = \int (\mathrm{F}dx + \mathrm{G}dy + \mathrm{H}dz - \Phi dt).$$

La longueur l ne dépendra pas du chemin suivi si :

$$\mathrm{F}dx + \mathrm{G}dy + \mathrm{H}dz - \Phi dt$$

est une différentielle totale exacte. D'où les conditions :

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = 0,$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} = 0, \qquad -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t} = 0, \qquad -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} = 0.$$

Si F, G, H, Φ sont les potentiels de la théorie électromagnétique, les premiers membres des formules précédentes nous donnent précisément les expressions des trois composantes de la

force magnétique et des trois composantes de la force électrique telles qu'on les rencontre dans les traités. La condition pour que des intervalles éloignés puissent être comparés directement sans qu'il y ait lieu de spécifier un mode particulier de comparaison est donc que la force électrique et la force magnétique soient nulles en tous les points de l'espace-temps situé entre les deux intervalles.

On peut remarquer que même une fois le système de coordonnées fixé, les potentiels électromagnétiques n'ont pas une valeur unique ; des quantités supplémentaires entièrement arbitraires peuvent leur être ajoutées pourvu que ces quantités forment une différentielle totale exacte. C'est précisément cette latitude qui, dans notre théorie géométrique, se traduit par un choix arbitraire du système de jauges. Les *forces* électriques sont d'autre part indépendantes du système de jauges car celui-ci se trouve éliminé quand on prend le « Rotationnel »].

Il apparaît donc que les quatre quantités qui se sont introduites dans notre géométrie généralisée peuvent être réellement les quatre potentiels de la théorie électromagnétique ; de plus, quand il n'y a pas de champ électromagnétique, notre géométrie primitive est valable. Dans le cas le plus général, au contraire, il nous faut adopter la géométrie la plus générale qui fait intervenir quatorze coefficients, dix d'entre eux servant à décrire les propriétés gravitationnelles de l'Univers, et les quatre autres ses propriétés électriques.

Nous devons maintenant rechercher la loi du champ électromagnétique en suivant la même marche que dans la recherche de la loi de gravitation, en posant qu'elle ne doit pas dépendre du système de coordonnées non plus que du système de jauges puisqu'elle a pour but de limiter le nombre de tous les genres possibles d'Univers qui peuvent exister dans la nature. Fort heureusement, ceci ne présente aucune difficulté car la loi exprimée par les équations de Maxwell et qui est universellement reconnue, remplit ces conditions. Il n'est pas besoin de la modifier profondément comme nous avons dû le faire pour la loi de gravitation. Il nous faut cependant la généraliser pour la rendre applicable au cas où un champ de gravitation vient se superposer au champ électromagnétique — sans nous en tenir, comme le fit Maxwell, à l'espace-temps euclidien. La déviation des ondes

électromagnétiques (lumière) par un champ de gravitation ne doit être qu'une conséquence nécessaire de cette loi généralisée.

A vrai dire, les lois de la gravitation et du champ électromagnétique ne forment pas deux lois mais une seule, de même que la géométrie des g et celle des k ne sont qu'une seule et même géométrie. S'il est souvent plus commode de considérer ces deux lois séparément, il n'en est pas moins vrai que ce ne sont que des parties de la condition générale qui limite le nombre de tous les genres possibles de systèmes mesurables que l'on peut rencontrer dans un espace vide.

Nous devons nous rappeler que le quadruple degré d'arbitraire de notre système de coordonnées impliquait l'existence de quatre identités exprimant, comme nous l'avons vu, la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. Dans la géométrie nouvelle il y a cinq degrés d'arbitraire, le cinquième degré étant introduit par le choix du système de jauges. Ce cinquième degré peut donner naissance également à une identité ; en fait, on a trouvé que cette identité exprimait la conservation de l'électricité.

La comparaison suivante aidera peut-être à comprendre le caractère de la nouvelle géométrie. Supposons qu'un observateur ait construit en un certain point P un segment de droite ayant une certaine longueur et une certaine direction et qu'il se propose de construire un segment exactement semblable en un point éloigné Q. S'il est sur un terrain plat, il ne trouvera aucune difficulté à effectuer cette opération ; il y procédera par échelons successifs à l'aide d'une sorte de triangulation et la route qu'il aura choisie n'influera pas sur le résultat. Nous savons d'une manière certaine qu'il n'y a qu'une direction en Q qui soit parallèle à la direction primitive en P et c'est une chose admise dans la géométrie ordinaire que la longueur du segment est également déterminée. Mais si le terrain n'est pas plat, il en va tout autrement. Imaginons qu'un observateur à deux dimensions confondu avec la surface courbe de la Terre essaye de mener à bien l'opération précédente. Comme il ne peut percevoir la troisième dimension il ne pourra pas non plus se rendre compte immédiatement de l'impossibilité du problème et il trouvera que la direction qu'il a transportée en Q diffère suivant le chemin qu'il a suivi. Ou encore, s'il décrit un circuit qui le fasse reve-

nir à son point de départ, il s'apercevra à son retour en P que cette direction qu'il avait mis tant de soin à conserver pendant son voyage, n'est plus la direction initiale (1). C'est cette propriété que l'on exprime en disant que dans un espace courbe la direction n'est pas intégrable, et c'est précisément cette non-intégrabilité de la direction qui caractérise le champ de gravitation. Dans le cas envisagé, la longueur du segment se trouvera conservée pendant le déplacement ; mais il est possible de concevoir un genre d'espace plus général dans lequel la longueur que l'on s'efforce, en même temps que la direction, de conserver identique à elle-même pendant tout le voyage, ne coïncide plus une fois revenue au point de départ avec la longueur initiale. On dit dans ce cas que la longueur n'est pas intégrable et la non-intégrabilité de la longueur caractérise le champ électro-magnétique. Une longueur associée à une direction forme ce que l'on appelle un vecteur ; la combinaison champ de gravitation—champ électromagnétique est l'indice de l'influence de l'Univers sur nos mesures, influence qui se traduit par la transformation insensible et continue en un vecteur différent d'un certain vecteur auquel par un procédé physique on fait décrire un contour fermé.

La fusion de la gravitation et de l'électricité en une géométrie unique est l'œuvre du Prof. H. Weyl qui publia un premier travail en 1918 (2). Il me semble devoir entraîner la conviction, bien qu'aucune épreuve expérimentale n'ait encore été proposée. Inutile de dire qu'une longueur qui a décrit un des circuits que la pratique nous offre journellement, n'a varié pendant le parcours que d'une quantité infinitésimale et que les manifestations courantes du champ électromagnétique sont les consé-

(1) On pourrait penser que toute ambiguïté disparaîtrait si l'observateur se représentant la direction primitive dans l'espace à trois dimensions, projetait cette direction sur la surface à deux dimensions en un point de celle-ci pour obtenir en ce point la direction cherchée. Seulement, l'espace à trois dimensions que l'on suppose contenir l'espace courbe à deux dimensions est entièrement arbitraire. Aucune expérience ne peut apprendre à un observateur à deux dimensions s'il est sur un plan ou sur un cylindre, sur une sphère ou sur quelque autre surface convexe de même courbure totale.

(2) Appendice. Note 15.

quences de variations absolument imperceptibles dans les mesures directes. A ce propos nous ne devons pas oublier que le champ de gravitation ne se perçoit également que par d'autres effets et non par la mesure directe des intervalles.

La théorie semble exiger que, par exemple, un atome n'ait pas une durée de vibration entièrement indépendante de son histoire antérieure. On peut admettre que les passés des atomes terrestres se ressemblent assez entre eux pour qu'il n'y ait pas de différence sensible dans les périodes de vibration d'atomes de même nature. Nous avons déjà fait allusion à cette possibilité que la différence systématique dans les passés de l'atome solaire et de l'atome terrestre pourrait avoir un effet sur le déplacement des raies spectrales solaires. Il paraît assez douteux, néanmoins, que cet effet soit assez important pour masquer le déplacement prévu.

Il peut sembler difficile d'identifier ces propriétés géométriques abstraites de l'Univers avec les forces physiques de l'électricité et du magnétisme. Comment relier, par exemple, la variation de longueur qu'aurait subie une barre pendant son déplacement le long d'un circuit fermé dans l'espace-temps, et la sensation d'une secousse électrique ? Les potentiels géométriques (k) obéissent aux lois connues des potentiels électromagnétiques et chaque entité de la théorie physique — charge, force électrique, élément magnétique, lumière, etc. — a un équivalent exact dans la théorie géométrique ; cette correspondance purement formelle est-elle une base suffisante pour autoriser l'identification ? Le doute qui s'élève dans nos esprits provient de ce que nous n'acceptons pas le formalisme dans les sciences physiques. « Telle chose n'est pas celle dont je parle, bien que toutes deux se comportent de la même manière », voilà une phrase qui pour le physicien n'a aucun sens. Tout ce qui se comporte exactement comme l'électricité doit être pour nous de l'électricité. La différence de forme est la seule que puisse reconnaître le physicien ; la différence d'individualité, si elle a un sens, n'a aucun rapport avec les manifestations physiques.

Nos explorations de l'Univers ne peuvent se faire qu'avec des appareils qui sont eux-mêmes des parties de l'Univers. L'appareil idéal se compose d'un petit nombre de constituants simples —

une particule neutre, une particule chargée, une règle graduée rigide, etc... Les éléments absolus de l'Univers se rapportent comme nous l'avons vu aux indications de ces corps d'épreuve, et ses caractères principaux sont si simples que nous avons à notre disposition une surabondance d'appareils pour les atteindre ; sans doute, la seule exploration par une particule neutre pourrait-elle, théoriquement du moins, nous faire trouver tout ce qui est à connaître. En réalité, nous préférons découvrir les propriétés de l'Univers à l'aide de règles graduées et d'horloges — les premières pour la mesure des intervalles dans l'espace ou imaginaires, les secondes pour celle des intervalles dans le temps ou réels ; nous parvenons ainsi à une conception géométrique complète de l'Univers. Il est probable que nous pourrions en obtenir une conception mécanique non moins complète en prenant pour étalon-indicateur une particule neutre ; ou bien une conception électrique par l'emploi d'une particule chargée. Dans chacun des différents problèmes que l'on a à résoudre il y a le plus souvent un corps d'épreuve qui est mieux approprié que les autres. C'est ainsi que la méthode d'exploration du champ de gravitation à l'aide d'une particule mobile est bien plus sensible que son étude métrique au moyen d'une règle graduée. On pourrait théoriquement étudier le champ électrique par la variation de longueur d'une règle assujettie à décrire une trajectoire fermée, mais il est infiniment préférable de n'utiliser qu'un fragment infime de la règle — un électron. En général, dans la pratique, pour se trouver dans les meilleures conditions on ne prend pas tel ou tel type simple d'instrument mais un appareil complexe conçu pour une expérience particulière. Si nous insistons sur l'interchangeabilité théorique des corps d'épreuve, c'est qu'elle fait bien ressortir l'unité et la simplicité de l'Univers ; pour cette raison, il est important de montrer que l'on peut trouver ses propriétés électromagnétiques au moyen de règles divisées ou d'horloges, si inadéquates soient-elles pratiquement comme instruments de mesures électriques.

La théorie de Weyl ouvre la voie à des développements intéressants. Les détails de cette nouvelle théorie comportent de grosses difficultés mathématiques ; cependant il est possible d'en donner un aperçu général. Comme dans la théorie plus

restreinte d'Einstein, il y a en tout point une caractéristique importante de l'Univers que l'on appelle la courbure ; mais dans la nouvelle théorie, ce n'est plus un invariant au sens strict du mot. Elle est bien indépendante du système de coordonnées, mais elle varie avec le système de jauges. Il est évident que le nombre qui exprime le rayon de courbure de l'Univers en un point doit dépendre de l'unité de longueur ; nous ne pouvons donc pas dire que les courbures en deux points sont égales d'une manière absolue car elles dépendent des jauges attachées à ces deux points. Inversement le rayon de courbure de l'Univers donne en chaque point une jauge naturelle et absolue ; nous introduirons sans doute dans nos lois le maximum de symétrie possible le jour où nous prendrons comme jauge attachée à chaque point le rayon de courbure lui-même, ou une fraction bien déterminée de celui-ci. Nous forcerons pour ainsi dire l'Univers à être sphérique en adoptant en chacun de ses points une unité de longueur qui le rendra tel. Nos règles divisées, quand nous les déplaçons, subissent des variations de longueur par rapport à cette unité absolue suivant le chemin qu'on leur a fait prendre ; ce sont ces variations qui correspondent au champ électromagnétique. L'espace courbe d'Einstein trouve tout naturellement sa place dans cette théorie ; nulle région de l'espace-temps n'est plane même en l'absence de matière ordinaire car ce serait dire que le rayon de courbure est infini, et il n'y aurait aucune jauge naturelle pour déterminer, par exemple, les dimensions d'un électron — l'électron ne pourrait savoir quelle grandeur il devrait prendre s'il n'avait plus de point de comparaison.

Le rapport qu'il y a entre la forme de la loi de gravitation et la quantité totale de matière répandue dans l'Univers nous semble maintenant moins mystérieux. La courbure de l'espace nous fournit indirectement la jauge qui nous sert à mesurer la quantité de matière que contient l'Univers.

La courbure dépendant de cette jauge, Weyl ne l'identifie pas avec la quantité la plus fondamentale de la nature. Il y a cependant un invariant un peu plus compliqué qui est un nombre pur et c'est lui qui fut identifié avec l'Action (1). Nous pouvons alors dire qu'à l'intérieur de tel volume de l'espace-

(1) Appendice. Note 16.

temps l'action est égale à 5 sans nous embarrasser d'un choix de coordonnées et d'unités de mesure ! On pourrait s'attendre à ce que l'action représentée par le nombre 1 présentât des propriétés intéressantes ; ce pourrait être, par exemple, un atome indivisible d'action. L'expérience a permis d'isoler ce que l'on croit être des actions-unités ; ce sont du moins des quantités qui dans nombre de phénomènes se conduisent comme des atomes indivisibles et que l'on a appelés des *quanta*. La théorie, au point où elle en est actuellement, ne nous permet pas de représenter le quantum d'action par le nombre 1. Le quantum n'est qu'une fraction extrêmement petite de l'unité absolue.

Quand nous rencontrons un nombre pur ayant dans l'Univers quelque signification absolue, il est naturel d'en chercher une interprétation. Il peut représenter un certain nombre d'entités distinctes, mais dans ce cas, nécessairement, ce nombre doit être entier ; or il semble que l'action puisse prendre des valeurs fractionnaires. Un angle est ordinairement représenté par un nombre pur ; seulement ce n'est qu'une apparence ; on ne peut évaluer un angle qu'une fois fixée l'unité d'angle de même qu'on ne peut mesurer une longueur qu'en fonction d'une unité de longueur. Je ne connais qu'une interprétation d'un nombre fractionnaire doué d'une signification absolue, bien qu'il y en ait d'autres sans aucun doute ; c'est le nombre qui exprime la probabilité de quelque chose, ou bien quelque fonction de cette probabilité. La fonction précise est facile à trouver. Les probabilités se combinent par voie multiplicative alors que c'est par voie additive que se fait la combinaison des actions ; par suite le logarithme d'une probabilité est tout indiqué. De plus, comme le logarithme d'une probabilité est nécessairement négatif, nous pouvons identifier, provisoirement du moins, l'action avec le logarithme changé de signe de la probabilité statistique de l'état actuel de l'Univers.

Cette hypothèse est particulièrement séduisante car le Principe de Moindre Action devient alors le Principe de Probabilité Maximum. La loi de la nature est que l'état réel de l'Univers est celui qui est statistiquement le plus probable.

La théorie de Weyl nous montre aussi que la masse d'une portion de matière est nécessairement positive ; d'après la théorie primitive rien ne s'opposait essentiellement à l'existence d'une

masse négative. La théorie montre de plus jusqu'à un certain point pourquoi l'Univers a quatre dimensions. Mathématiquement, il paraît si simple de faire une généralisation à *n* dimensions de la géométrie, que nous pourrions nous attendre à ce qu'un Univers à quatre dimensions ait un équivalent à cinq dimensions. Il semble ne pas en être ainsi car il y a un certain nombre de propriétés essentielles presque indispensables pour l'existence de l'Univers et qui ne peuvent exister que pour quatre dimensions. Peut-être est-il possible de comparer ceci à la difficulté bien connue que l'on rencontre dans la généralisation à plus de trois dimensions de la notion de nœud ; le nœud ne peut exister que dans un espace à un nombre impair de dimensions et non dans un espace en ayant un nombre pair.

Enfin, la théorie nous donne un moyen pour attaquer le problème de l'explication de la tension électrique de l'électron ; du moins nous montre-t-elle pourquoi la force de gravitation est si faible par rapport à la force électrique. Rappelons qu'à la masse du Soleil nous avons associé une certaine longueur, sa masse gravitationnelle, égale à 1,5 kil. La masse gravitationnelle ou rayon gravitationnel de l'électron est de 7×10^{-56} cm. ; à ses propriétés électriques est de même associée une longueur de 2×10^{-13} cm. que l'on appelle son rayon électrique et l'on admet aujourd'hui que c'est ce dernier qui correspond aux dimensions réelles de l'électron. La théorie suggère que le rapport du rayon de gravitation au rayon électrique, $3,5 \times 10^{-43}$, doit être du même ordre de grandeur que le rapport de ce dernier au rayon de courbure de l'Univers. Le rayon de l'espace serait alors de l'ordre de 6×10^{29} cm. ou 2×10^{11} parsecs [1], évaluation plus forte que celle faite par de Sitter, mais qui appartient encore au domaine des choses possibles.

[1] Rappelons que le « parsec » est une unité astronomique égale à la distance d'une étoile fictive dont la parallaxe serait de 1'' ; c'est 200.000 fois environ la distance du Soleil à la Terre. (*Note du Trad.*).

CHAPITRE XII

Sur la nature des choses.

Cette harmonie que l'intelligence humaine croit découvrir dans la nature, existe-t-elle en dehors de cette intelligence ? Non, sans doute, une réalité complètement indépendante de l'esprit qui la conçoit, la voit ou la sent, c'est une impossibilité. Un monde si extérieur que cela, si même il existait, nous serait à jamais inaccessible. Mais ce que nous appelons la réalité objective, c'est, en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et qui pourrait être commun à tous ; cette partie commune, nous le verrons, ce ne peut être que l'harmonie exprimée par des lois mathématiques.

H. Poincaré (*La Valeur de la Science*).

Les résultats auxquels aboutit la théorie de la relativité sont basés sur deux principes que nous avons énoncés — le principe de relativité restreinte et le principe d'équivalence. On peut les résumer sous cette forme unique : les mouvements uniformes et les champs de force sont essentiellement relatifs. Sous leur forme plus explicite ce sont des généralisations expérimentales que l'on peut accepter ou rejeter ; si on les accepte, tous les résultats que l'observation nous a fournis peuvent être déduits mathématiquement sans qu'il y ait besoin de faire intervenir les théories sur l'espace, le temps ou la force, exposées dans cet Ouvrage. Sous plusieurs rapports c'est là l'aspect le plus séduisant de l'œuvre d'Einstein ; de deux principes généraux seulement et avec l'aide d'une méthode de calcul extrêmement puissante, Eisntein a pu déduire l'explication de nombre de phénomènes remarquables ; il laisse de côté toutes les questions de mécanisme, les considérant comme étrangères à sa théorie. Malheureusement le développement de cette théorie ne peut être exposé que dans un traité technique.

Pour éviter l'analyse mathématique nous avons eu recours à des illustrations géométriques parallèles au développement mathématique et qui nous permettent de le comprendre jusqu'à un certain point. Mais une question se pose : ces représentations sont-elles de simples illustrations du raisonnement mathématique, ou bien de véritables images de ce qui se passe réellement dans la nature ? Sans aucun doute, le moyen le plus simple et le plus sûr serait d'éviter les questions épineuses que soulève ce problème et de dire qu'il nous suffit que ces illustrations puissent remplacer correctement le raisonnement mathématique. A mon avis, un tel argument donnerait une idée fausse des progrès que la théorie de la relativité a fait faire à la science.

Le physicien, tant qu'il raisonne en physicien, a une croyance bien arrêtée dans la réalité du monde extérieur. Ainsi, il a foi dans l'existence réelle des atomes et des molécules ; pour lui, ce ne sont pas de simples fictions qui lui donnent le moyen de comprendre certaines lois des combinaisons chimiques. Il a pu en être ainsi dans les débuts de la théorie atomique, mais maintenant, l'atome est dans l'Univers du physicien une entité dont l'existence est amplement démontrée. Cette affirmation n'est en rien incompatible avec le doute philosophique sur le sens de la réalité finale.

Aussi, quand on vient nous demander si l'Univers à quatre dimensions ne peut pas être considéré simplement comme une illustration de la méthode mathématique, nous devons immédiatement penser que notre interlocuteur a vraisemblablement un motif sérieux pour nous poser cette question. Il croit à la réalité de l'Univers euclidien à trois dimensions, et il espère qu'on l'autorisera à ne pas sacrifier sa croyance. En ce cas, notre réponse doit être nette ; l'Univers réel à trois dimensions, tombé en désuétude, doit être remplacé par un espace-temps quadridimensionnel à propriétés non euclidiennes. Dans ce Livre, nous avons eu parfois recours à des images qui ne correspondent sûrement à aucune réalité physique — le temps imaginaire ou encore une cinquième dimension que nous n'avons jamais perçue. L'Univers à quatre dimensions n'est pas une simple image ; c'est l'Univers réel du physicien, auquel on est arrivé par la méthode bien connue que la physique (à tort ou à raison) a toujours suivie dans sa recherche de la réalité.

J'ai devant les yeux un certain objet et je vois tracée l'image de Britannia ; un autre observateur, regardant cet objet sous une autre face, aperçoit le portrait d'un monarque ; un troisième ne voit qu'un mince rectangle. Dois-je dire que c'est l'image de Britannia qui est l'objet réel, et que les impressions brutes perçues par les autres observateurs doivent être corrigées en tenant compte de leurs positions respectives ? Tous ces aspects différents sont aisément explicables car l'objet observé — ici, un penny — a trois dimensions ; nul être doué de raison n'oserait mettre en doute que le penny soit ici la réalité objective correspondant à ces aspects différents. Supposons de même qu'une observateur terrestre reconnaisse à un certain bloc qu'il a sous les yeux une forme oblongue, et que cette impression lui soit confirmée par la mesure ; un observateur situé sur une autre étoile trouve au contraire que le même bloc est cubique. Dirons-nous que l'objet est réellement oblong et que l'observateur stellaire doit corriger sa mesure en tenant compte de son mouvement ? Tous les aspects de l'objet sont explicables si celui-ci a quatre dimensions, car les différents observateurs n'en ont sous les yeux que des aspects ou des sections tridimensionnelles ; il semble impossible de mettre en doute que ce soit là l'explication véritable. Celui qui doute de la réalité de l'Univers à quatre dimensions (pour des raisons de pure logique par opposition aux raisons expérimentales) peut être comparé à l'homme qui doute de la réalité du penny et qui préfère considérer l'une de ses apparences possibles comme l'objet réel.

La réalité physique est la synthèse de tous les aspects physiques possibles de la nature. Nous pouvons en trouver un exemple dans les phénomènes de l'énergie rayonnante ou de la lumière. Dans certains cas, la lumière émise par un atome prend l'apparence d'une série d'ondes qui se déroulent et qui s'étalent jusqu'à pouvoir remplir nos télescopes les plus volumineux. Dans d'autres phénomènes, cette même lumière nous apparaît sous l'aspect d'un quantum élémentaire d'énergie qui, pénétrant dans un seul atome, peut le faire exploser. Peut-être nous trompons-nous dans ces déductions expérimentales ; sinon, il nous faut admettre que la réalité physique qui correspond à la lumière doit être une synthèse englobant ces deux aspects particuliers. Le moyen d'effectuer cete synthèse a toujours échappé

à notre conception ; la leçon que nous en pouvons tirer, c'est qu'un très grand nombre d'apparences — par exemple toutes celles que perçoivent directement des observateurs terrestres — peuvent se combiner pour former un tout bien déterminé mais que ce tout peut néanmoins n'être encore lui-même qu'une apparence. La réalité n'est obtenue que lorsqu'on fait entrer dans la combinaison tous les points de vue imaginables.

C'est la raison pour laquelle nous avons dû renoncer à la réalité de cet Univers à trois dimensions qui nous est familier. Jusqu'à ces derniers temps, il réalisait la combinaison de toutes les apparences observées ; mais on découvrit de nouveaux points de vue donnant des apparences nouvelles que la réalité devait également englober. C'est en combinant aux anciens tous ces nouveaux points de vue qu'il a été possible de connaître la nature de l'Univers objectif de la physique.

Récapitulons rapidement les différentes phases de cette synthèse. Nous avons trouvé que l'une d'elles était déjà accomplie. La perception directe de l'Univers avec un seul œil est une apparence bidimensionnelle ; nos deux yeux nous fournissent une combinaison des aspects que prend l'Univers quand on l'observe de deux positions différentes. Notre cerveau, par un processus mystérieux, effectue la synthèse et nous donne la notion du relief ; c'est ainsi que nous obtenons l'apparence courante de l'Univers à trois dimensions. Elle suffit à tous les besoins d'un observateur qui peut occuper toutes les positions possibles des régions connues de l'espace. La phase suivante est la combinaison de tous les aspects de l'Univers pour un observateur qui peut prendre toutes les vitesses uniformes possibles. Le résultat, c'est l'addition d'une dimension supplémentaire à l'Univers qui devient ainsi un Univers à quatre dimensions. Puis la synthèse se poursuit en y faisant entrer tous les mouvements variables possibles de l'observateur. On ne peut plus ajouter de dimension nouvelle, mais l'Univers devient non euclidien ; une géométrie nouvelle, celle de Riemann est adoptée. Enfin interviennent les points de vue d'observateurs de grandeur arbitrairement variable, et l'on aboutit au remplacement de la géométrie de Riemann par la géométrie plus générale dont nous avons parlé dans le dernier chapitre.

La recherche d'une réalité physique, sans avoir nécessaire-

ment un but utilitaire, n'aura pas été sans profit. Plus la géométrie devenait compliquée, plus au contraire la physique se simplifiait ; il semble même que la géométrie ait presque fini par absorber la physique. Nous n'avions nullement l'intention de construire une théorie géométrique de l'Univers ; mais c'est au cours de la recherche d'une réalité physique par des méthodes éprouvées que cette théorie géométrique prit naissance.

Le point que nous avons atteint, est-ce le but final ? Avons-nous fait intervenir les points de vue de tous les observateurs imaginables ? Nous ne pouvons l'affirmer. Il semble néanmoins qu'une étape a été définitivement franchie. Tous les points de vue impersonnels possibles, à notre connaissance, ont été englobés dans notre synthèse — tous ceux pour lesquels l'observateur peut être regardé comme un automate et remplacé par des instruments de mesure scientifiques. Il serait peut-être nécessaire, pour parvenir à l'objectivité suprême, de faire appel à toute une catégorie de points de vue plus personnels ; mais c'est à grand'peine que nous saurions leur trouver une place dans l'Univers réel de la physique. Ici donc nous pouvons nous arrêter, mais nous n'avions pas le droit de nous arrêter plus tôt.

On peut se demander s'il est vraiment indispensable de faire entrer en ligne de compte tous les observateurs imaginables, nombre d'entre eux n'ayant, c'est probable, aucune existence. L'Univers *réel* n'est-il pas celui qui réalise la synthèse de ses aspects pour tous les observateurs *réels* possibles ? Qu'elle soit soutenable ou non cette hypothèse que ce que nul n'observe n'existe pas, la science la repousse fermement. Nier les droits des observateurs extra-terrestres, c'est prendre parti pour l'Inquisition contre Galilée. Mais si on les admet, ces observateurs extra-terrestres, les autres observateurs dont les résultats sont ici combinés ne peuvent pas être exclus.

Notre recherche de la nature des choses est soumise à certaines limitations qu'il importe de bien préciser. La meilleure comparaison que je puisse trouver est celle de recherches archéologiques futures faites par exemple vers l'an 5000. Je suppose que l'on ait fait une découverte extrêmement intéressante, concernant une civilisation, florissante vers le vingtième siècle, mais disparue depuis longtemps, en l'espèce un livre où se trouvent décrites un grand nombre de parties d'échecs, dans le lan-

gage symbolique obscur que l'on a coutume d'employer à ce sujet. Les archéologues pour qui le jeu était jusqu'alors inconnu, finiront par découvrir certaines répétitions ; finalement, après de longues et patientes recherches, ils réussiront à établir, d'une manière absolument indubitable, la règle du jeu et le mouvement des pièces. Mais il est évident qu'en aucun moment l'étude du livre n'aura donné d'indications sur la nature des objets qui participent au jeu — les pièces — ni sur celle du champ d'action de la partie — l'échiquier. Tout ce qu'il est possible de faire au sujet des pièces, c'est de leur donner des noms arbitraires permettant de les distinguer les unes des autres d'après leurs propriétés respectives ; en ce qui concerne l'échiquier, on peut faire plus. La matière dont il est fait est inconnue ; inconnue également la forme des cases — on ne sait si ce sont des carrés ou des losanges ; néanmoins, il est certain que les différents points de ce champ de bataille sont liés les uns aux autres comme les éléments d'une multiplicité à deux dimensions et que l'on peut concevoir un grand nombre d'échiquiers satisfaisant à ces relations. Malgré ces lacunes dans leurs connaissances, nos archéologues ont parfaitement le droit de dire qu'ils possèdent à fond la règle du jeu.

L'analogie est la suivante. Les parties d'échecs décrites ce sont nos expériences physiques. Les règles du jeu que l'étude de ces expériences permet de fixer, ce sont les lois de la physique. L'échiquier hypothétique à soixante-quatre cases, c'est l'espace-temps de quelque observateur ou joueur particulier ; ici, les relations les plus générales correspondent à une multiplicité à deux dimensions ; là, ce sont les relations absolues déjà rencontrées, qui unissent les éléments de la multiplicité quadridimensionnelle de l'espace-temps. Les pièces du jeu d'échecs deviennent des entités de la physique — électrons, particules ou points-événements ; peut-être même pouvons-nous comparer l'échiquier lui-même aux champs de force ou aux relations entre ces entités — champs électriques et gravitationnels, ou bien intervalles. L'étude expérimentale ne peut absolument rien nous apprendre sur la nature et même sur l'apparence de ces entités. Mais cette connaissance est étrangère à la question car nous pouvons nous en passer pour apprendre le « jeu » avec toutes ses combinaisons. Notre science de la nature des

choses doit ressembler à la connaissance que nos archéologues auraient de la nature des pièces : ils les regarderaient comme des éléments du jeu, pions ou pièces, et non comme des figures de bois sculptées. Sous ce dernier aspect, au contraire, les choses peuvent présenter des rapports et des significations dépassant tout ce que l'on a pu imaginer en physique.

Il semble bien que les objets les plus familiers de l'expérience sont extrêmement complexes, et la méthode scientifique consiste à les décomposer en éléments plus simples. Ce sont les théories et les lois relatives à ces constituants plus simples que l'on étudie ; à partir de ces théories et de ces lois il devient possible de prédire et d'expliquer les phénomènes. Il semble tout naturel d'expliquer le complexe par le simple, mais cela entraîne la nécessité d'expliquer le familier par ce qui ne l'est plus.

Il y a deux raisons pour lesquelles les constituants ultimes de l'Univers réel doivent être d'une nature qui ne nous est pas familière. D'abord parce que tous les objets qui nous sont familiers sont d'un caractère trop complexe. Ensuite ces objets familiers appartiennent non pas à l'Univers réel mais à un stade beaucoup moins avancé de la synthèse des apparences. Les éléments primordiaux de la théorie de l'Univers doivent être d'une nature dont il est impossible de donner une définition intelligible.

Le mathématicien ne trouve aucune difficulté à raisonner sur des entités dont il ignore la nature. Comme le Mathématicien que nous avons rencontré dans le Prologue, il n'est jamais si heureux que quand il ne sait pas de quels objets il parle. Mais nous, nous ne pouvons trouver d'intérêt à la chaîne des raisonnements qu'il nous présente que lorsqu'il nous est possible de lui donner une signification — signification qui nous est fournie par l'expérience, bien entendu ; notre rôle doit être de commenter à mesure les résultats qu'il obtient. Au début, ses symboles n'offrent à nos yeux aucune image et nous devons, tout en l'observant, garder le silence. Puis, peu à peu, nous pouvons dire : « Ah ! Voilà qu'il parle d'une particule matérielle »... « Il est question maintenant d'une autre particule »... « Il fixe l'endroit où elles seront toutes les deux à telle époque »... « Il affirme qu'à tel moment elles se trouveront au même point ». — Nous chercherons à vérifier. — « Oui, les

deux particules se sont effectivement heurtées. Pour une fois, ce qu'il dit nous est familier et ses prévisions sont exactes, mais, bien entendu, il n'en sait rien ». Il est évident que c'est la chaîne de ses symboles qui peut être interprétée comme décrivant ce qui se passe dans l'Univers ; nous n'avons pas besoin, et en fait nous ne le faisons pas, de trouver une signification à chacun d'eux ; seules, certaines de leurs combinaisons nous semblent reconnaissables.

Ainsi, bien que les concepts élémentaires de la théorie soient, par leur nature même, indéfinissables, nous devons faire correspondre les concepts qui en dérivent aux objets familiers de l'expérience.

Nous allons maintenant rassembler les résultats auxquels nous sommes arrivés par échelons successifs dans les chapitres précédents et donner à la théorie un ordre plus logique. La généralisation traitée au Chapitre XI ne sera pas envisagée dans ce nouvel exposé, d'abord parce qu'elle rendrait moins facilement saisissables les idées fondamentales, ensuite parce qu'elle n'est pas encore établie avec un degré de certitude suffisant.

Dans la théorie de la relativité, le concept le plus élémentaire, c'est le *point-événement*. En langage ordinaire, un point-événement n'est autre qu'un certain point de l'espace considéré à un certain instant ; mais ce n'est là qu'un aspect du concept et ce que nous venons de dire ne doit pas être pris comme définition. Le temps et l'espace — les termes qui nous sont familiers — sont des notions dérivées que nous n'introduirons que beaucoup plus tard dans la théorie. Les premiers concepts simples sont nécessairement indéfinissables et ils dépassent l'intelligence humaine. L'ensemble des événements constitue l'*Univers*. On accorde à l'Univers quatre dimensions, ce qui signifie qu'un événement particulier doit être défini par les valeurs de quatre variables ou coordonnées, ces quatre nombres pouvant être choisis d'une manière entièrement arbitraire.

Le sens de cette proposition que l'Univers a quatre dimensions n'est pas aussi clair qu'il le paraît à première vue. L'ensemble d'un grand nombre d'objets n'a en lui-même aucun nombre particulier de dimensions. Considérons, par exemple, les mots imprimés sur cette page. Si l'on jette les yeux sur la page, on n'y voit qu'une distribution à deux dimensions de ces

mots ; pourtant, ils ont été écrits dans l'espoir que le lecteur voudra bien les regarder comme ordonnés suivant une dimension unique. Pour fixer le nombre des dimensions, nous devons nous baser sur quelque relation fixant l'ordre des éléments considérés, et le résultat dépend essentiellement de la nature de cette relation — par exemple, la distribution des mots sur cette page peut être faite suivant un ordre de signification, ou bien simplement suivant un ordre de position. Dire que l'Univers a quatre dimensions c'est donc le rapporter implicitement à quelque relation d'ordre. Cette relation paraît être l'*intervalle,* mais je ne suis pas sûr qu'elle suffise à elle seule, et peut-être est-il nécessaire de lui adjoindre quelque relation répondant à une idée de *proximité.* Il ne faut pas oublier en effet que si l'intervalle s entre deux événements est petit, il n'en résulte pas nécessairement que ces deux événements soient voisins au sens ordinaire du mot.

Entre deux événements voisins quelconques, il existe un certain lien commun qui a reçu le nom d'*intervalle.* C'est une relation quantitative susceptible de prendre toute une échelle de valeurs numériques (1). Mais il ne faut pas se baser sur le mot « intervalle » pour en conclure l'objectivité de cette relation, car celle-ci est entièrement inaccessible à notre raison. Les propriétés géométriques de l'intervalle, sur lesquelles nous nous sommes arrêtés tant de fois dans les chapitres précédents, ne nous donnent qu'un aspect de la relation ; elle peut en avoir d'autres associés à des caractères de l'Univers qui ne soient plus du domaine de la physique. Mais ce qui intéresse le physicien, ce n'est pas la nature de cette relation, c'est le nombre qu'on lui assigne pour exprimer sa grandeur ; et ceci nous suggère une représentation graphique qui nous conduit à une théorie géométrique de l'Univers physique.

Ce que nous venons d'appeler l'*Univers* aurait peut-être pu tout aussi bien recevoir le nom d'*éther* ; c'est, en tout cas, un substratum universel que la théorie de la relativité substitue à l'éther.

(1) Il existe également une distinction qualitative en intervalles dans le temps et en intervalles dans l'espace, qui, dans le raisonnement mathématique, se caractérisent par des valeurs réelles ou des valeurs imaginaires de s.

Nous avons vu que le nombre qui exprime la grandeur de l'intervalle peut pratiquement se mesurer au moyen de règles graduées et d'horloges. Je crois qu'il est bien peu probable que nos mesures grossières puissent arriver à saisir les intervalles individuels des événements ponctuels, car elles ne sont pas suffisamment microscopiques. L'intervalle, tel qu'il nous est apparu dans notre analyse, doit donc avoir une valeur *macroscopique* ; les potentiels et genres d'espace que l'on en déduit sont des moyennes pour des régions petites sans doute même par rapport à l'électron, mais contenant encore un nombre extrêmement grand d'intervalles primordiaux. Nous en arrivons donc immédiatement à la considération de l'intervalle macroscopique ; seulement, nous n'anticiperons pas sur des résultats que nous établirons ultérieurement, en supposant cet intervalle mesurable avec une règle graduée et une horloge. Cette propriété doit être introduite dans un ordre logique.

Considérons une région très petite de l'Univers. Elle contient un nombre extrêmement grand (infini peut-être) de points-événements qui, deux à deux, sont séparés par des intervalles. Si nous nous donnons d'une part les intervalles entre un point A et un nombre suffisant d'autres points, d'autre part les intervalles entre ces derniers et un point B, pouvons-nous calculer la valeur de l'intervalle qui sépare A de B ? Dans la géométrie ordinaire le problème serait possible ; mais, comme dans le cas présent nous ignorons tout de la relation que désigne le mot intervalle, il nous est impossible de prédire quelque loi *a priori*. Cependant, nous avons trouvé plus haut qu'une telle règle existait, et qu'elle se traduisait par la formule :

$$ds^2 = g_{11}dx_1{}^2 + g_{22}dx_2{}^2 + \ldots\ldots + 2g_{12}dx_1dx_2 + \ldots.$$

Ceci signifie que, les nombres (x_1, x_2, x_3, x_4) étant attribués aux points-événements, nous n'avons qu'à faire la mesure de dix intervalles différents pour être à même de déterminer les dix coefficients g_{11}, etc., qui, dans une région très petite, peuvent être assimilés à des constantes ; cette détermination faite, notre formule nous permet de prévoir la valeur de n'importe quel intervalle de la région considérée. Si l'on passe à une autre région, il faut opérer de nouvelles mesures analogues et déterminer les nouveaux coefficients de la formule.

Je crois qu'il est fort peu probable que les intervalles *individuels* de points-événements obéissent à une règle aussi bien définie. Un examen microscopique nous les montrerait sans doute comme entièrement arbitraires, les intervalles individuels de points dits intermédiaires n'ayant pas nécessairement eux-mêmes des valeurs intermédiaires. Peut-être même l'intervalle primordial n'est-il pas susceptible de variation continue, et est-il simplement égal à un pour certains couples de points-événements, et à zéro pour certains autres. La formule que nous avons donnée n'est qu'une formule de moyennes qui correspond à nos méthodes grossières d'investigation et qui n'est vraie que statistiquement. Les moyennes statistiques d'une collectivité peuvent différer de celles d'une autre ; de même cette formule statistique applicable dans une certaine région peut ne plus l'être dans une autre. Telle est la cause de l'infinie variété de la nature.

Peut-être un exemple rendra-t-il la question plus claire. Comparons les points-événements à des personnes et les intervalles aux liens d'amitié qui les unissent deux à deux. Il n'y a pas moyen de prévoir le degré d'amitié de A pour B, connaissant les liens d'amitié qui unissent respectivement A et B à C, D, E, etc... On peut dans chaque collectivité établir une sorte de loi statistique. Dans la plupart des cas A et B à la fois connaissent C, ce qui accroît légèrement la probabilité que A et B se connaissent également. Une collectivité dans laquelle tous les individus sont étroitement liés les uns aux autres, est dite un *clan*. Il peut y avoir sous ce rapport des différences entre les collectivités, suivant le degré d'union qui existe dans le clan ; par suite, les lois statistiques permettent d'exprimer les différences intrinsèques entre les diverses collectivités.

Mais là se présente une difficulté qui nous est maintenant familière. Les dix g ne dépendent pas seulement des propriétés intrinsèques de l'Univers, mais aussi du système arbitraire des nombres qui servent à repérer les points-événements ; ou, comme nous l'avons vu, ils ne servent pas seulement à décrire le genre d'espace-temps, mais encore à fixer la nature du système de coordonnées en usage. Les mathématiques nous indiquent le moyen de tourner cette difficulté en nous conseillant

l'emploi d'expressions appelées tenseurs dont $B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ et $G_{\mu\nu}$ sont des exemples.

Un tenseur ne donne pas explicitement la mesure d'une propriété intrinsèque de l'Univers ; un genre quelconque de système de coordonnées est indispensable pour la mesure d'une telle propriété, sauf dans certains cas spéciaux où elle est exprimable par un nombre pur que l'on appelle un invariant ; ce cas se présente pour l'intervalle et pour la courbure totale. Mais dire qu'un tenseur s'annule ou qu'il est égal à un autre tenseur dans la même région, c'est énoncer une propriété intrinsèque entièrement indépendante du système de coordonnées choisi. Donc, par l'emploi exclusif des tenseurs, nous obligeons nos formules à dépeindre des caractères intrinsèques de l'Univers.

Dans cette voie, nous avons trouvé deux formules absolues qui semblent pleinement confirmées par l'observation, à savoir :

dans un espace vide, $G_{\mu\nu} = 0$,
dans un espace contenant de la matière, $G_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}$,

où $K_{\mu\nu}$ renferme certaines grandeurs physiques qui nous sont des plus familières : la densité et l'état du mouvement de la matière dans la région considérée.

Je crois que l'interprétation habituelle de ces équations est la suivante : la première exprime une loi de la nature d'après laquelle les points-événements sont naturellement contraints de régler leurs liaisons de manière à se conformer à cette équation. Mais, quand la matière intervient, elle est la cause de perturbations entraînant des modifications dans ces liens naturels, et il s'établit un nouvel équilibre conformément à la deuxième équation.

Voyons d'un peu plus près ce que nous apprend l'équation $G_{\mu\nu} = 0$. Le mathématicien a eu toute liberté d'action avec ses points-événements et ses intervalles indéfinissables. Il a abouti à la quantité $G_{\mu\nu}$ qui pour nous, jusqu'ici, n'a absolument aucun sens. Le mathématicien pur abandonné à lui-même, jamais ne s'écarte de son chemin pour donner une signification à ce qu'il fait. Jamais ses travaux ne se rapportent aux objets familiers qui nous entourent à moins que nous ne mettions résolument la main sur ses symboles pour leur *donner*

des significations intelligibles — cette attribution se fait d'abord à titre d'essai, puis elle passe au définitif quand on a trouvé qu'elle était compatible avec l'expérience. Nous avons décidé que dans un espace vide $G_{\mu\nu}$ s'annulerait : c'est pour nous l'occasion d'interpréter l'égalité $G_{\mu\nu} = o$. A défaut d'une autre interprétation nous dirons que cette égalité *signifie* que là où elle est valable, il y a le vide ; ainsi, dire que $G_{\mu\nu}$ n'est pas nul, c'est caractériser un espace qui n'est pas vide. Jusqu'ici, $G_{\mu\nu}$ n'est qu'une sorte de forme générale appelée à se remplir d'un contenu indéfinissable ; et, plus que jamais, nous sommes parfaitement incapables d'expliquer ce que peut être ce contenu ; seulement nous avons donné maintenant au tableau que nous avions tracé une signification intelligible dont nous nous souviendrons chaque fois que nous le rencontrerons au cours de nos expériences.

Les deux équations ne sont par suite que de simples définitions — définitions des impressions que nous avons de certains états de l'Univers (mais décrits en termes indéfinissables). Quand nous percevons que telle région de l'Univers est vide, c'est simplement que nos sens reconnaissent que cette région n'a pas une courbure d'un degré supérieur au premier. Si au contraire nous avons la sensation que la région contient de la matière, c'est que nous y reconnaissons une courbure intrinsèque de l'Univers ; quand nous croyons évaluer la masse et la quantité de mouvement de la matière (relatives à quelque système d'axes de référence), c'est en réalité certaines composantes de la courbure d'Univers (rapportée à ces axes) que nous mesurons. Les moyennes statistiques de propriétés inconnues, dont nous nous sommes servis dans la description de l'Univers, varient d'un point à un autre ; ce sont ces moyennes qui nous ont permis de concevoir les notions familières de matière et de vide.

La loi de gravitation n'est pas une loi, si l'on entend par ce mot une limitation de la manière dont peut se comporter le substratum universel ; ce n'est simplement qu'une définition du vide. Nous n'avons pas besoin de considérer la matière comme une entité étrangère, cause de perturbations dans le champ de gravitation ; la perturbation, c'est la matière elle-même. De même, nous n'avons pas à regarder la lumière

comme une intruse dans le champ électromagnétique, contraignant le vecteur électromagnétique à osciller sur son parcours, car ce sont ces oscillations mêmes qui constituent la lumière. Non plus que la chaleur n'est un fluide produisant l'agitation des molécules d'un corps ; l'agitation moléculaire, c'est la chaleur elle-même.

La matière est un indice et non une cause ; c'est là une idée qui paraît si naturelle qu'il est surprenant qu'on l'ait perdue de vue dans l'exposé habituel de la théorie. La raison en est que la correspondance de l'analyse mathématique avec les objets de l'expérience est établie ordinairement non pas en déterminant ce qu'est la matière, mais en se fondant sur les effets de certaines de ses combinaisons. C'est pourquoi l'intervalle s'est trouvé immédiatement identifié avec une propriété expérimentale qui nous est familière. : l'entité que l'on mesure avec une règle graduée et une horloge. Quels que soient les avantages que puisse présenter cette identification pour mettre en contact la théorie avec l'expérience, il est bien peu probable que nous puissions arriver à bâtir une théorie de la nature des choses en prenant pour concepts inanalysables primordiaux la règle divisée et l'horloge. Le résultat de cette inversion dans l'ordre logique, c'est qu'au moment où nous avons rencontré l'équation $G_{\mu\nu}=K_{\mu\nu}$, les deux membres de cette relation étaient des quantités bien définies ; on ne prit pas garde à leur identité *nécessaire,* et l'équation devint une nouvelle loi de la nature. La faute, ce fut d'introduire trop tôt la règle graduée et l'horloge. A notre avis, il nous semble préférable de définir tout d'abord la matière au moyen des concepts élémentaires de la théorie ; nous pouvons alors introduire n'importe quel genre d'appareil scientifique et finalement déterminer la propriété de l'Univers que mesure cet appareil.

La matière définie de cette manière obéit à toutes les lois de la mécanique, y compris celles de la conservation de l'énergie et de la quantié de mouvement. En exposant d'une manière analogue la théorie plus générale de Weyl sur la combinaison du champ de gravitation et du champ électrique, nous trouverions que cette même matière a les propriétés électriques et optiques que nous lui connaissons. C'est une hypothèse entièrement gratuite de supposer qu'il existe quelque chose dans l'Univers qui

se conforme aux relations des quatorze potentiels (les g et les k) et qui ne soit pas identique à ces relations.

On ne peut exiger de la matière qu'une qualité nouvelle. Nos cerveaux sont constitués par de la matière ; or ils sentent et ils pensent — ou du moins la sensation et la pensée sont étroitement liées aux mouvements et aux changements de la matière dans nos cerveaux. Il serait bien difficile de dire qu'une hypothèse quelconque sur la nature de la matière puisse rendre ces processus plus ou moins compréhensibles ; on ne pourrait pas dire non plus qu'un cerveau constitué par les coefficients différentiels des fonctions g serait moins capable de penser et de sentir qu'un autre formé, par exemple, par de minuscules boules de billard ! Mais je crois que l'on peut même aller un peu au-delà de cette justification négative. La relation d'intervalle primordiale est d'une nature impossible à définir et les g contiennent cet élément indéfinissable. L'expression $G_{\mu\nu}$ est donc d'une *forme* définie, mais son *contenu* est indéterminé. C'est par sa forme seule qu'elle doit rendre compte de toutes les propriétés physiques de la matière ; jamais l'investigation physique ne pourra pénétrer au-dessous de la forme. Or, la matière du cerveau, sous son aspect physique, c'est la forme ; son essence même, c'est le contenu. Nous ne pouvons rien attendre de la forme pour expliquer l'activité du contenu, pas plus que nous pouvions attendre du nombre 4 quelque explication de l'œuvre du Conseil des Quatre à Versailles !

Quelques-unes de ces vues sur la matière, l'esprit remarquablement pénétrant de W.-K. Clifford les avait déjà émises par anticipation il y a une quarantaine d'années. Pendant que les autres physiciens anglais perdaient leur temps avec des atomes-tourbillons ou couraient après d'autres feux-follets, Clifford était absolument convaincu que la matière et le mouvement n'étaient que des aspects de la courbure d'espace *et rien de plus.* Il n'était pas moins convaincu que ces notions géométriques ne sont que des aspects partiels des relations que présentent entre eux ce qu'il appelait des « éléments de sensation ». — « La réalité correspondant à notre perception du mouvement de la matière est un élément de l'ensemble complexe que nous appelons une sensation. Ce que nous pourrions percevoir comme un plexus d'agitations nerveuses, n'est à vrai dire qu'une seule

sensation ; la conscience humaine, produit de l'ensemble de nos sensations, c'est la réalité qui cause dans notre esprit la perception des mouvements de notre cerveau. Ces éléments de sensation présentent entre eux des relations de *proximité* ou de contiguïté dans l'espace, comme nous en avons un exemple dans la perception visuelle de points contigus, et des relations de succession dans le temps, que l'on rencontre dans tous les genres de perception. C'est en partant de ces deux catégories de relations que le théoricien futur devra, du mieux qu'il le pourra, édifier la Théorie de l'Univers. Deux choses, peut-être, pourront l'aider. Il y a un long chapitre de la pensée mathématique qui montre que la distance ou toute autre quantité peuvent être regardées comme des fonctions de *position*, ce dernier mot étant pris avec le sens large qu'il a dans l'*analysus situs*. D'autre part la théorie de la courbure de l'espace fait entrevoir qu'il est possible de décrire la matière et son mouvement en ne parlant que d'extensions. » (*Fortnightly Review*, 1875).

L'équation $G_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}$ ressemble à un dictionnaire qui nous donnerait la signification des composantes de la courbure d'Univers dans le langage courant de la mécanique. Si nous écrivons cette équation sous la forme légèrement différente, mais équivalente :

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\ G = -8\pi T_{\mu\nu},$$

le tableau suivant nous permet d'en faire l'interprétation :

$$\begin{array}{llll} T_{11}, & T_{12}, & T_{13}, & T_{14} \\ & T_{22}, & T_{23}, & T_{24} \\ & & T_{33}, & T_{34} \\ & & & T_{44} \end{array} = \begin{array}{llll} p_{11} + \rho u^2, & p_{12} + \rho uv, & p_{13} + \rho uw, & -\rho u \\ & p_{22} + \rho v^2, & p_{23} + \rho vw, & -\rho v \\ & & p_{33} + \rho w^2, & -\rho w \\ & & & \rho\ . \end{array}$$

Nous utilisons là les divisions d'espace et de temps adoptées dans la mécanique ordinaire ; ρ est la densité de la matière, u, v, w sont les composantes de sa vitesse, $p_{11}, p_{12}, \ldots\ldots, p_{33}$ les composantes des tensions internes que l'on croit être la cause des mouvements moléculaires.

Mais est-il légitime d'opérer ainsi en gros ces identifications ? Une fois T_{44} identifié avec la densité avons-nous le droit d'identifier une autre quantité, T_{34} par exemple, avec le produit de

la densité par une vitesse ? C'est comme si nous identifiions une « chose » avec de l'*air* et une « chose » entièrement différente avec du *vent*. Oui, c'est légitime, parce que jusqu'ici nous n'avons pas dit quel était l'équivalent de la vitesse dans notre schéma de l'Univers ; et tel est le moyen que nous choisissons pour l'introduire. Toutes les identifications en sont encore au stade provisoire puisqu'aucune n'a été soumise à l'épreuve expérimentale.

La définition de la vitesse de la matière comme une quantité analogue ou « quotient du *vent* par l'*air* » ne correspond pas au mouvement tel qu'il se manifeste à nous dans l'expérience. Le mouvement se reconnaît généralement par la disparition d'une particule en un certain point et la réapparition d'une particule d'apparence identique en un point voisin. Cette manifestation du mouvement peut être déduite mathématiquement de la définition par identification donnée précédemment. Si nous nous rappelons que dans la théorie physique il est nécessaire de procéder du simple au complexe, ce qui est souvent en opposition avec notre désir instinctif de partir des choses qui nous sont familières pour aboutir à celles qui ne le sont pas, cette inversion dans l'ordre où nous apparaissent ordinairement les manifestations du mouvement ne doit nous causer aucune surprise. L'identité permanente des particules de matière entre elles (indispensable à notre notion ordinaire de la vitesse) est une idée qui nous est extrêmement familière, mais il semble que ce soit un des caractères les plus complexes de l'Univers.

On peut donner un exemple simple montrant l'insuffisance de la conception courante du mouvement. Supposons qu'un anneau parfaitement homogène et continu tourne comme une roue ; quelle signification pouvons-nous donner à son mouvement ? La conception cinématique ordinaire implique un changement quelconque — disparition en un point, réapparition en un autre point — ; or, aucun changement ne peut être mis en évidence. L'état à un moment quelconque est identique à l'état d'un moment antérieur et l'on ne peut distinguer la matière occupant une certaine position de celle qui avait la même position un moment auparavant. Tout au plus y a-t-il une certaine qualité mystérieuse et non physique — l'identité — qui ne se soit pas conservée ; mais si, comme le pensent nom-

bre de physiciens, la matière n'est qu'un état particulier de l'éther, que peut-on bien vouloir dire quand on affirme que deux états sont exactement semblables et ne sont pas identiques ? La température d'une salle peut-elle être égale à la température qu'elle possédait la veille sans lui être identique ? Au point de vue cinématique, le mouvement de rotation de l'anneau nous apparaît donc comme dépourvu de toute signification ; pourtant, mécaniquement, l'anneau tournant diffère de l'anneau fixe ; ainsi, il est doué de propriétés gyrostatiques. Le fait que l'anneau a une structure atomique discontinue intervient à peine dans cette question. Il faut qu'il existe une conception du mouvement permettant de distinguer l'anneau homogène et continu qui tourne de l'anneau fixe ; sinon, en effet, ce serait une preuve *a priori* de la structure atomique de la matière. Précisément, dans sa conception nouvelle, la vitesse de la matière est tout autant une qualité statique que la densité. En général, la vitesse est accompagnée de changements dans l'état physique de l'Univers, qui nous fournissent les moyens habituels de révéler son existence ; néanmoins l'exemple donné plus haut nous montre que ces indices ne se rencontrent pas nécessairement.

Cette définition de la vitesse nous permet de voir pourquoi une vitesse n'a de sens que si on la rapporte à de la matière, alors qu'au contraire l'accélération et la rotation avaient une signification même sans cette référence. Cet argument philosophique qu'une vitesse à travers l'espace ne signifie rien, cesse d'être applicable si l'on accorde une certaine structure aux régions vides, aurement dit si l'on admet qu'il y a un éther ; le problème n'est donc pas si simple qu'on le suppose bien souvent. Seulement, notre définition de la vitesse est dynamique et non cinématique. La vitesse, c'est le rapport de certaines composantes de $T_{\mu\nu}$ deux à deux ; elle n'existe que si T_{44} n'est pas nul. La matière (ou l'énergie électromagnétique) est donc la seule chose qui puisse avoir une vitesse par rapport au système de référence. La vitesse de la structure d'Univers, ou éther, c'est-à-dire des régions où $T_{\mu\nu}$ s'annule, est de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Au contraire, l'accélération et la rotation sont définies au moyen des $G_{\mu\nu}$; elles existent partout où ceux-ci

existent [1] ; la structure d'Univers ou éther a par suite une accélération et une rotation bien déterminées par rapport au système de référence. Remarquons que l'accélération n'est pas définie comme un taux de variation de la vitesse ; c'est une entité indépendante beaucoup plus simple et d'un caractère bien plus universel que la vitesse. Pour finir, c'est par la comparaison de ces deux entités que l'on arrive à la définition du temps.

Nous trouvons enfin la solution de la difficulté rencontrée au Chapitre X, — la différence apparente que présente le principe de relativité quand il est appliqué au mouvement uniforme, ou au mouvement non uniforme. En principe, la vitesse et l'accélération sont toutes deux des qualités statiques d'une région de l'Univers (rapportée à un certain système de coordonnées). L'accélération est une qualité relativement simple qui existe là où il y a une structure géodésique, c'est-à-dire partout. La vitesse est une qualité bien plus complexe que l'on ne rencontre que là où la structure est elle-même plus compliquée que partout ailleurs, c'est-à-dire là où il y a de la matière. Ce sont ces deux qualités qui, ordinairement, causent les manifestations physiques auxquelles sont plus particulièrement appliqués les mots accélération et vitesse ; mais, c'est en examinant leur signification fondamentale que l'on peut se rendre compte de l'universalité de l'une et du caractère particulier de l'autre.

Nous avons établi l'existence de quatre identités qui lient entre elles dix des différentes qualités d'un fragment de matière et qui ne dépendent que de la manière dont on a défini la formation des $G_{\mu\nu}$ à partir des éléments plus simples. Ces quatre identités expriment que, *pourvu que le système de coordonnées soit choisi convenablement,* la masse (ou l'énergie) et la quantité de mouvement se conservent. La conservation de la masse est d'une grande importance ; la matière subsiste et, pour toute particule qui disparaît en un point, il apparaît une masse équivalente en un point voisin ; le changement

[1] Même dans la mécanique newtonienne, il est question du « champ d'accélération », et l'on en conçoit l'existence sans même qu'il y ait de corps d'épreuve pour mettre cette accélération en évidence. Dans la théorie précédente, ce champ d'accélération est dépeint par les $g_{\mu\nu}$. Dans un espace vide, il n'y a rien d'analogue pour « un champ de vitesse » ; celui-ci n'existe que dans la matière.

consiste en un déplacement de la matière, et non en sa création ou sa destruction. Ceci donne à la matière le droit d'être regardée, non pas comme un pur assemblage de symboles, mais comme la substance d'un Univers indestructible. Seulement, cet Univers permanent nécessite une division de l'espace-temps faite sur un des modes établis au Chapitre III (1). Parmi ces différents modes, l'observateur choisit un espace-temps particulier car il désire se considérer, lui, ou bien quelque autre objet arbitraire, comme au repos. Ceci nous donne l'espace et le temps tels que nous les rencontrons dans la description ordinaire de nos expériences. Nous pouvons de cette manière introduire dans l'Univers à quatre dimensions l'espace et le temps de notre perception, c'est-à-dire les concepts dérivés que nous faisons dépendre de notre volonté de considérer comme permanente la matière telle que nous venons de l'entendre.

Je crois qu'il est maintenant possible de voir la raison pour laquelle l'Univers doit nécessairement revêtir la forme que nous lui avions trouvée. Quand nous avons le spectacle d'un océan agité, ce n'est pas la particule tourbillonnante de l'eau qui attire notre attention, c'est la vague que nous voyons parce qu'elle offre un certain degré de permanence. Le mouvement que nous remarquons plus spécialement c'est celui de la forme qui constitue la vague, et qui n'est pas du tout un mouvement de l'eau.

De même, ce qui arrête le regard de l'observateur (2) qui con-

(1) Quand l'espace-temps est d'un genre tel que l'on ne peut en faire une division rigoureuse suivant l'un des modes voulus, la conservation rigoureuse n'existe pas non plus ; mais, pour que le principe soit formellement satisfait, on attribue une énergie et une quantité de mouvement au champ de gravitation.

(2) Jusqu'ici nous utilisons le mot « observateur » pour désigner son *corps* et ses appareils de mesure ; nous avons fait jouer à son *esprit* un rôle ni plus ni moins important que dans les autres théories physiques. Pour la première fois, maintenant, nous avons égard au fait que les propriétés de l'Univers extérieur que discute la physique sont des propriétés qui ont été choisies par l'esprit. Le principe de la sélection doit être une loi de l'esprit ; les lois de la nature qui dépendent de cette sélection peuvent être regardées comme imposées par l'esprit. Ainsi, l'esprit, dans notre théorie, est comparable à un tyran qui fonde ses lois sur l'Univers *qu'il perçoit*. Ce n'est là qu'une moitié du problème car c'est à peine s'il est nécessaire de faire remarquer qu'une loi de l'esprit n'est

temple l'Univers des points-événements, c'est ce qui est permanent. Les relations plus simples, telles que les intervalles et les potentiels, sont transitoires au contraire et elles ne sont pas d'une consistance suffisante pour que l'esprit se risque à les prendre pour s'en faire une demeure. Mais ce que nous avons identifié avec la matière est permanent et, à cause de cette permanence, ce doit être pour nous la substance de l'Univers. Pratiquement, aucun autre choix n'était possible.

Il faut remarquer que la conservation de la masse n'est pas rigoureusement équivalente à la permanence de la matière. Si tout à coup un pain vient à se transformer en un chou, notre surprise n'en sera point diminuée parce que le poids se sera conservé. Il n'est pas commode de caractériser le fond de cette permanence théorique parce que nous regardons comme parfaitement naturelles certaines transformations qui, en apparence, ne diffèrent pas beaucoup de la précédente — transformation d'un œuf en omelette, ou du radium en plomb. Il semble du moins évident que c'est la permanence d'une seule qualité, la masse, que l'on devrait regarder comme caractéristique dans la matière, et ceci explique suffisamment le choix de l'identification que nous avons faite.

En résumé, nous voyons que le choix d'une substance permanente pour l'Univers de notre perception entraîne nécessairement comme conséquences la loi de la gravitation, toutes les lois de la mécanique et enfin l'introduction de l'espace et du temps qui entrent dans nos expériences. Toute notre théorie n'a été en réalité qu'une discussion de la manière la plus générale dont nous puissions édifier une substance permanente sur de simples relations ; c'est la raison qui, ne voulant regarder que ce qui est permanent, a en réalité imposé toutes ces lois à un Univers complètement indifférent. La nature n'a eu que fort peu de rapports avec la matière ; son rôle unique a été de nous four-

autre qu'une loi à laquelle l'esprit doit lui-même obéir. Il est naturel de penser que la prédisposition de l'esprit à ne considérer que ce qui est permanent doit être un caractère acquis par la sélection naturelle ; les esprits qui, aujourd'hui, ne présentent pas ce caractère sont confiés aux asiles d'aliénés, et dans les premiers jours du « struggle for life » ils n'auraient pas eu le loisir de faire longtemps leur « mea culpa ». Mais nous n'avons pas à nous occuper de ce côté de la question.

nir une base — les points-événements ; mais pratiquement cette base aurait pu être quelconque, seul aurait varié le degré de complexité des relations. La théorie de la relativité ramène tout, en physique, à des relations ; autrement dit, c'est la structure, non la substance, qui compte. La substance est indispensable à la structure mais sa nature n'a aucune importance. Nous pouvons à ce propos citer un passage de Bertrand Russell tiré de l'*Introduction to Mathematical Philosophy*.

« On aurait pu éviter de nombreuses et longues discussions philosophiques, si l'on avait bien vu le rôle important que joue la structure et la difficulté qu'il y a d'aller au delà. On dit souvent, par exemple, que l'espace et le temps sont subjectifs mais qu'ils ont l'un et l'autre des contre-parties objectives ; ou encore que les phénomènes sont subjectifs mais qu'ils ont en eux-mêmes les causes qui leur donnent naissance, ces causes différant entre elles comme lès phénomènes qu'elles produisent. Là où se rencontrent de pareilles hypothèses, il est généralement admis qu'il nous est impossible d'en savoir long sur la nature des contre-parties objectives. En réalité, si de telles hypothèses, telles qu'elles sont exposées, étaient correctes, ces contre-parties objectives formeraient un Univers ayant la même structure que l'Univers des phénomènes... En résumé, toute proposition ayant une signification que nous puissions communiquer à d'autres êtres pensants, doit être vraie à la fois dans ces deux sortes d'Univers, ou bien alors dans aucun : la seule chose qui permet de distinguer ces deux Univers c'est précisément cette essence d'individualité qui sans cesse échappe à nos mots et se dérobe à notre description, et qui, pour cette raison, est étrangère à la science ».

Voici la position actuelle de notre théorie. — Nous avons un Univers de points-événements avec leurs relations d'intervalle primordiales. Celles-ci servent à construire mathématiquement un nombre illimité de relations plus compliquées qui décrivent les différents caractères des états de l'Univers. Ces relations existent aussi nombreuses dans la nature que les sentiers en nombre illimité que l'on peut imaginer sur une lande nue et désolée. Mais l'existence de ces sentiers est en quelque sorte à l'état latent ou virtuel jusqu'à ce que quelqu'un traversant la lande vienne à donner à l'un d'eux, celui qu'il a suivi, sa

signification réelle. De même, l'une quelconque de ces relations ne prend une signification qui la caractérise qu'au moment où l'intelligence humaine vient à la choisir. L'esprit, tel un filtre, laisse passer la matière et arrête la foule confuse et insignifiante des autres qualités, de même que le prisme laisse filtrer les pures couleurs de l'arc-en-ciel parmi le chaos des vibrations de la lumière blanche. L'esprit exalte le permanent, il ignore le transitoire ; comme le montre l'étude mathématique de ces relations, notre esprit n'a qu'un moyen de se satisfaire ; c'est de choisir une qualité particulière comme la substance permanente de l'Univers de nos sensations, en effectuant dans l'espace et le temps que nous percevons une division assurant cette permanence ; une conséquence nécessaire de ce véritable choix de Hobson, c'est que les lois de la gravitation et de la mécanique et la géométrie doivent s'y trouver satisfaites. Est-il exagéré de dire que c'est notre esprit qui, en recherchant la permanence, a créé l'Univers de la physique ? Et que par suite l'Univers de notre perception n'aurait pas pu être différent de ce qu'il est (1) ?

Cette dernière phrase va peut-être un peu loin, mais elle nous montre bien la direction vers laquelle tendent toutes ces vues. La théorie plus générale de Weyl sur les relations d'intervalle montre de la même manière que les lois de l'électrodynamique dépendent simplement de l'identification d'une autre chose permanente — la charge électrique. Dans ce cas, l'identification est due, non pas à l'intelligence rudimentaire du sauvage ou de l'animal, mais à la puissance de raisonnement du savant. La conclusion que nous pouvons tirer de tout cela, c'est que les lois de la nature que nous avons fait entrer dans un schéma unique — mécanique, gravitation, électrodynamique, optique — ont leur origine non pas dans un mécanisme spécial de la nature, mais dans notre esprit lui-même.

« Donnez-moi de la matière et du mouvement », aurait dit

(1) Ce résumé a pour but de montrer la direction vers laquelle tendent, à mon avis du moins, les vues que nous suggère la théorie de la relativité, plutôt que d'exposer d'une manière précise ce que nous avons établi. Je sais qu'il y a, à l'heure actuelle, de nombreuses lacunes dans notre argument, de sorte que toute cette partie de la discussion doit être regardée comme ayant un caractère plus suggestif que dogmatique.

Descartes, « et je vous construirai l'Univers ». La raison retourne cette phrase et dit : « Donnez-moi l'Univers — un Univers comportant des relations — et je vous construirai matière et mouvement ».

N'y a-t-il pas alors de lois véritables dans l'Univers extérieur ? Des lois inhérentes au substratum des événements et qui se dégagent de phénomènes réglés par ailleurs par le despotisme de notre esprit ? Nous ne pouvons prédire quelle sera la réponse définitive ; néanmoins, aujourd'hui, nous devons admettre l'existence de lois qui semblent avoir leur siège dans l'Univers extérieur. La plus importante de ces lois, sinon la seule, c'est la loi de l'atomicité. Pourquoi cette qualité de l'Univers qui distingue la matière du vide n'existe-t-elle qu'en certains points de concentration appelés atomes ou bien électrons, tous de masse comparable ? D'où provient cette discontinuité ? Pour le moment, il semble qu'il n'y ait aucune raison nous autorisant à regarder cette discontinuité comme une loi due à notre esprit, car lui-même a plutôt de la peine à faire disparaître les discontinuités de la nature pour y substituer la perception du continu. Nous sommes obligés de supposer qu'il y a dans la nature des choses une cause à cette concentration en atomes. Il est probable que notre décomposition en points-événements n'est pas la dernière que nous puissions faire ; si nous pouvions pousser notre analyse et atteindre quelque entité encore plus fondamentale, peut-être alors l'atomicité et les autres lois de la physique apparaîtraient-elles comme des identités. C'est là, à vrai dire, la seule explication définitive que puisse accepter le physicien. Mais cette analyse plus complète et plus définitive n'est pas sur le même plan que celle qui nous a permis d'atteindre le point-événement. L'Univers *peut* être ainsi constitué que les lois de l'atomicité y soient réellement des lois nécessaires ; mais, tant que l'esprit joue un rôle, il semble n'y avoir aucune raison pour que l'Univers ait cette constitution. Nous pouvons fort bien l'imaginer autrement. L'argument sur lequel nous nous sommes appuyés jusqu'ici, c'était que l'on pouvait, quelle que soit la constitution de l'Univers, trouver des combinaisons des choses, obéissant aux lois de la mécanique, de la gravitation et de l'électrodynamique, ces combinaisons étant toutes prêtes à jouer le rôle d'un Univers de perception

pour une intelligence en harmonie avec elles ; de plus, tout Univers de perception d'une nature différente, notre raison doit le rejeter comme non substantiel.

Il y avait autrefois un vieil économe de collège qui vivait cloîtré chez lui et qui se consacrait entièrement à ses comptes. Il avait coupé tous les liens qui l'unissaient avec l'extérieur et il ne se faisait une idée de l'activité et de la vie intellectuelle du collège que d'après les reflets qui lui en venaient à travers ses notes. Ses comptes à lui, c'était son Univers ; chacun des différents items revêtait dans son esprit une individualité. Au fond de lui-même se peignait vaguement une réalité objective — parallèle en quelque sorte au collège réel — dont il n'avait notion que par les livres, les shillings et les pence, c'est-à-dire les liens qui l'unissaient à cette réalité. Faire ses comptes, c'était devenu pour lui une habitude inévitable que lui avait léguée une longue lignée d'économes qui, comme lui, vivaient en ermites ; et il ne se figurait pas qu'il était pour quelque chose dans cette habitude ; il lui semblait impossible que ses comptes pussent être disposés autrement qu'ils ne l'étaient. Il avait pourtant une tournure d'esprit scientifique et il voulait en savoir plus long sur le collège — l'Univers de ses comptes. Un jour, en vérifiant ses livres, il fit une découverte sensationnelle. A chaque item qui apparaissait du côté « Avoir » correspondait quelque part dans la colonne « Doit » un item égal. « Ah! », dit l'économe, « j'ai découvert une des grandes lois qui régissent le collège. C'est une loi rigoureuse et parfaite de la nature, qui ne souffre aucune exception. Tout ce qui est « Avoir » doit être affecté du signe plus, tout ce qui est « Doit » du signe moins ; nous obtenons ainsi la loi de la conservation des livres, shillings et pence. Je ne vois pas les limites qui peuvent borner mes recherches ; et bientôt, je commencerai à comprendre pourquoi chaque jour le coût de la vie augmente ».

Comme l'économe, il se peut que nous ayons eu tendance à confondre les lois économiques avec les lois de nos comptes — les lois qui dirigent l'évolution de l'Univers extérieur et celles qui proviennent de la superposition des différents aspects sous lesquels il *nous* apparaît. Là où la physique a obtenu ses succès les plus grands, c'est dans la découverte de lois qui en grande partie, je crois, appartiennent à la seconde catégorie, celle des

lois subjectives. Il n'y a aucune raison de mettre en doute que la physique ne soit capable de découvrir les lois de la première catégorie ; mais jusqu'ici bien peu de progrès ont été faits sur cette route rocailleuse.

Si l'atomicité dépend de lois inhérentes à la nature, il semble à première vue difficile de comprendre la raison pour laquelle elle intéresse spécialement la matière, puisque la matière ne joue pas un rôle essentiel dans le schéma analytique et qu'elle ne doit son importance qu'à des considérations étrangères apportées par l'esprit. Nous avons vu, cependant, que l'atomicité ne se confinait pas uniquement à la matière et à l'électricité ; le quantum dont l'importance est tellement capitale dans la physique moderne, est en apparence un atome d'action. On ne peut donc accuser la nature d'être de connivence avec l'esprit pour singulariser la matière. L'action passe généralement pour la chose la plus fondamentale de l'Univers réel de la physique, bien que l'esprit la néglige par suite de son manque de permanence ; on a une vague conviction que l'atomicité de l'action doit être la loi générale, et que de cette loi doit dépendre d'une manière ou d'une autre l'apparence des électrons. Mais les physiciens n'ont pas encore pu formuler d'une manière précise la théorie des quanta d'action.

Il y a un contraste frappant entre le triomphe de l'esprit scientifique qui expose le grand schéma général des lois de la nature, toutes ramenées aujourd'hui au principe de moindre action, et cette défaite que lui infligent les phénomènes extrêmement généraux découverts récemment, relatifs à la loi d'atomicité des quanta. Il est trop tôt pour proclamer son échec dans ce dernier cas ; mais il se pourrait tout de même que le contraste ait une signification. C'est déjà quelque chose que l'intelligence humaine ait su extraire des phénomènes de la nature les lois qu'elle y avait elle-même placées ; il se peut qu'il lui soit bien plus difficile d'en extraire les lois qui ne furent jamais de son domaine. Il est même possible que les lois qui ne tirent pas leur origine de notre esprit, soient inintelligibles et que nous ne réussissions jamais à les énoncer. Ce n'est pourtant qu'une éventualité lointaine ; il est probable que si ces lois avaient été réellement inaccessibles à notre raison, nous n'aurions même pas pu faire progresser la science comme nous l'avons fait, si

limités ces progrès soient-ils. Mais si les lois des quanta créent vraiment une distinction entre l'Univers réel et tout autre Univers que nous puissions concevoir, nous pouvons nous attendre, si nous voulons les énoncer, à rencontrer des difficultés auprès desquelles toutes celles que la physique nous a présentées jusqu'à ce jour, ne sont rien.

La théorie de la relativité a passé en revue tous les sujets de la physique. Elle a unifié les grandes lois qui, par la précision dans la forme et la rigueur dans l'application, ont conquis dans la science humaine la place d'honneur que la physique occupe aujourd'hui. Et pourtant, en ce qui concerne la nature des choses, cette science n'est qu'une forme vide — un échafaudage de symboles. C'est la science de la structure et non celle de la substance. Tout l'Univers de la physique est rempli par cette substance inconnue qui, sans aucun doute, doit être l'objet de nos sensations. C'est là un aperçu des points de vue grandioses que nous offre cet Univers physique mais que nous ne pouvons atteindre par les méthodes de la physique. De plus, nous avons trouvé que là où la science a fait les progrès les plus marqués, l'esprit n'a fait que retirer de la nature ce qu'il y avait introduit lui-même.

Nous avons découvert l'étrange empreinte d'un pas sur le rivage de l'Inconnu. Pour expliquer son origine nous avons bâti théories sur théories, toutes plus ingénieuses et plus profondes les unes que les autres. Nous avons enfin réussi à reconstituer l'être qui laissa cette empreinte, et cet être, il se trouve que c'est nous-même !

APPENDICE.

NOTES MATHÉMATIQUES.

Note 1 (p. 25).

Il est impossible de calculer rigoureusement la contraction à partir des équations générales de l'électromagnétisme car celles-ci sont insuffisantes. Il faut qu'il y ait d'autres forces ou d'autres conditions pour déterminer la forme et les dimensions de l'électron ; sous l'effet des forces électromagnétiques seules, celui-ci s'étendrait indéfiniment dans tous les sens. La vieille électrodynamique est complètement muette sur la nature de ces forces supplémentaires.

La théorie de Larmor et de Lorentz établit que si un système au repos dans l'éther est en équilibre, le même système en mouvement uniforme à travers l'éther et dont les dimensions dans le sens du mouvement auront subi la contraction de Fitzgerald, sera également en équilibre en tout point de l'espace où les équations différentielles du champ électromagnétique seront applicables. La théorie reconnaîtra donc la généralité de la contraction observée si toutefois les conditions à la limite sur la surface de l'électron sont compatibles avec cette contraction. Or ce point fut confirmé par des expériences faites sur des électrons isolés en mouvement rapide (expériences de Kaufmann). Cela revient à dire qu'un électron doit se contracter dans le même rapport qu'une règle matérielle ; ainsi, bien que la théorie jette un peu de lumière sur le mécanisme de la contraction matérielle, on ne peut pas dire qu'elle donne une explication générale de l'existence de cette contraction.

Note 2 (p. 59).

Supposons qu'une particule se meuve du point-événement (x_1, y_1, z_1, t_1) au point-événement (x_2, y_2, z_2, t_2) ; sa vitesse u est donnée par :

$$u^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(t_2 - t_1)^2}.$$

La formule donnant s^2 peut donc s'écrire :

$$s = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - u^2}.$$

(Nous laissons de côté le facteur $\sqrt{-1}$ car le signe de s^2 est changé dans la suite du Chapitre).

Si t_1 et t_2 désignent le début et la fin du cigare de l'aviateur (Chapitre I), nous aurons, au jugement de l'observateur terrestre,

$$t_2 - t_1 = 60 \text{ minutes},$$

$$\sqrt{1 - u^2} = \text{contraction de Fitzgerald} = \tfrac{1}{2}.$$

Au jugement de l'aviateur,

$$t_2 - t_1 = 30 \text{ minutes},$$
$$\sqrt{1 - u^2} = 1.$$

Ainsi, pour les deux observateurs, $s = 30$ minutes, ce qui montre bien que c'est là une quantité absolument indépendante de l'observateur.

Note 3 (p. 60).

Les formules de transformation des coordonnées pour une rotation des axes sont :

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - \tau' \sin\theta \\ y &= y' \\ z &= z' \\ \tau &= x' \sin\theta + \tau' \cos\theta, \end{aligned}$$

où θ est l'angle de rotation des axes dans le plan $x\tau$.

Soit $u = i \operatorname{tg} \theta$, de sorte que l'on peut poser :

$$\beta = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} .$$

Les formules précédentes deviennent

$$\begin{aligned} x &= \beta(x' - iu\tau') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ \tau &= \beta(\tau' + iux'), \end{aligned}$$

ou, en posant $i\tau = t$ pour revenir au temps réel :

$$\begin{aligned} x &= \beta(x' - ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \beta(t' - ux'), \end{aligned}$$

ce qui nous donne les relations entre les coordonnées respectives de deux observateurs en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre ; leurs systèmes de coordonnées d'espace sont supposés rectangulaires et confondus au temps $t = t' = 0$; leur vitesse relative est dirigée suivant l'axe des x (ou des x').

Le facteur β donne dans la première équation la contraction de Fitzgerald, et dans la quatrième, le retard dans le temps. Les termes ut' et ux' correspondent aux conventions nouvelles de *repos* et de *simultanéité*.

Un point au repos $x = \text{const.}$, pour le premier observateur correspond à un point se mouvant avec la vitesse u, $x' - ut' = \text{const.}$, pour le second. Par suite la vitesse relative de ces observateurs l'un par rapport à l'autre est u.

Note 4 (p. 102).

La condition de planéité d'un espace à deux dimensions est :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{g_{12}}{g_{11}\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - \frac{g_{12}}{g_{11}\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Note 5 (p. 111).

Soit g la valeur du déterminant du quatrième ordre dont les éléments sont les coefficients $g_{\mu\nu}$.

Désignons par $g^{\mu\nu}$ le mineur de $g_{\mu\nu}$ divisé par g.

On entend par « symbole à trois indices du deuxième genre » de Christoffel $\{\mu\nu, \lambda\}$ l'expression :

$$\frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)$$

où l'on additionne tous les résultats obtenus en donnant à α les valeurs 1, 2, 3, 4. Il y a 40 symboles différents à trois indices.

Le tenseur de Riemann-Christoffel est :

$$B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma, \rho\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu, \rho\} + \{\mu\sigma, \varepsilon\}\{\varepsilon\nu, \rho\} - \{\mu\nu, \varepsilon\}\{\varepsilon\sigma. \rho\},$$

les termes contenant ε devant être sommés pour toutes les valeurs entières de ε de 1 à 4.

Le tenseur « contracté » de Riemann-Christoffel $G_{\mu\nu} = B^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}$ peut s'écrire sous la forme :

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\mu\nu, \alpha\} + \{\mu\alpha, \beta\}\{\nu\beta, \alpha\} + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\log\sqrt{-g} - \{\mu\nu, \alpha\}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\log\sqrt{-g},$$

où, suivant une convention générale, tout terme contenant deux fois le même indice doit être sommé pour les valeurs 1, 2, 3, 4 de cet indice.

La courbure $G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$ doit être calculée en tenant compte de la convention précédente.

Note 6 (p. 118).

Le potentiel électrique dû à une charge e est :

$$\Phi = \frac{e}{\left[r\left(1 - \frac{v_r}{C}\right)\right]},$$

v_r étant la vitesse radiale de la charge, C la vitesse de la lumière et la parenthèse carrée indiquant qu'il s'agit de valeurs retardées. Si, comme degré d'approximation, on s'en tient à l'ordre de $\frac{v_r}{C}$, le dénominateur est égal à la distance *actuelle* r et l'expression se réduit à $\frac{e}{r}$ comme si la propagation était instantanée. La formule précédente pour le potentiel a été donnée par Liénard et Wiechert.

Note 7 (p. 121).

On trouve que le tableau suivant des valeurs des potentiels satisfait rigoureusement à l'équation $G_{\mu\nu} = 0$, les $G_{\mu\nu}$ étant ceux donnés dans la Note 5,

$$\begin{matrix} -\frac{1}{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ & -x_1^2 & 0 & 0 \\ & & -x_1^2 \sin^2 x_2 & 0 \\ & & & \gamma \end{matrix}$$

où $\gamma = 1 - \frac{k}{x_1}$, k étant une constante (*Partie théorique*, § 29). Par suite, ces potentiels définissent un espace-temps que l'on peut rencontrer réellement dans la nature, cet espace-temps étant rapporté à un certain système de coordonnées. Si $k = 0$, les potentiels se réduisent à ceux d'un espace-temps euclidien rapporté à des coordonnées polaires. On peut donc remplacer x_1, x_2, x_3, x_4 par les notations ordinaires r, θ, φ, t. Il ne faut pas oublier pourtant que l'identification avec les coordonnées polaires n'est qu'approximative ; une approximation également très bonne est obtenue si nous posons $x_1 = r + \frac{k}{2}$, substitution souvent employée au lieu de $x_1 = r$, car elle a l'avantage de rendre plus symétrique l'expression de la vitesse de la lumière en fonction des coordonnées.

On peut ensuite trouver analytiquement toutes les propriétés mécaniques et optiques d'un pareil genre d'espace-temps ; l'observation montre que ces propriétés sont indentiques à celles que l'on rencontre dans le voisinage d'une particule au repos

située à l'origine des coordonnées et de masse gravitationnelle $\frac{k}{2}$. D'où cette conclusion que le champ de gravitation que nous avons décrit est produit par une particule de masse $\frac{k}{2}$ — ou, si l'on préfère, une particule de matière au repos *est produite* par le genre d'espace-temps considéré.

Note 8 (p. 123).

En posant égale à l'unité la constante de gravitation, nous avons pour une orbite circulaire :

$$\frac{m}{r^2} = \frac{v^2}{r},$$

d'où :

$$m = v^2 r.$$

La vitesse de la Terre, v, est approximativement de 30 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$, ou $\frac{1}{10.000}$ de la vitesse de la lumière. Le rayon de son orbite r est à peu près égal à $1,5 \times 10^8$ km. Donc m, masse gravitationnelle du Soleil est sensiblement 1,5 km.

Le rayon du Soleil étant 697.000 km., la quantité $\frac{2m}{r}$ que l'on rencontre dans nos formules est, à la surface du Soleil, égale à 0,000 004 24 ou 0'',87.

Note 9 (p. 152).

(Voir *Partie Théorique*, §§ 30-31).

Les équations générales d'une géodésique sont :

$$\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \{\alpha\beta, \mu\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4).$$

L'élément linéaire étant donné par :

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{\gamma} - r^2 d\theta^2 + \gamma dt^2, \qquad (1)$$

on peut calculer les symboles à trois indices ; on trouve que deux des équations géodésiques prennent la forme plus simple :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d(\log\gamma)}{dr} \cdot \frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0,$$

qui par intégration, donnent :

$$r^2\frac{d\theta}{ds} = h, \qquad (2)$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{c}{\gamma}. \qquad (3)$$

h et c étant des constantes d'intégration.

Par élimination de dt et de ds entre (1), (2) et (3) on obtient :

$$\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = c^2 - 1 + \frac{2m}{r} + \frac{2mh^2}{r^3},$$

ce qui peut s'écrire :

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2-1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2} + 2mu^3,$$

en posant $u = \frac{1}{r}$.

En différentiant par rapport à θ :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2,$$

ce qui donne l'équation de l'orbite sous la forme habituelle dans la dynamique du point matériel. Elle diffère de celle de l'orbite newtonienne par la présence du terme $3mu^2$ qui implique, comme il est facile de le voir, le mouvement du périhélie.

La trajectoire d'un rayon lumineux s'obtient également à partir de cette formule puisque, d'après le principe d'équivalence, elle est identique à celle d'une particule matérielle se mouvant avec la vitesse de la lumière. Il suffit de faire $ds = 0$, et par suite $h = \infty$. L'équation différentielle du rayon lumineux est donc :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3mu^2.$$

Une solution approchée est :

$$u = \frac{\cos\theta}{R} + \frac{m}{R^2}(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)$$

en négligeant les quantités très petites $\frac{m^2}{R^2}$. En revenant aux coordonnées cartésiennes :

$$x = R - \frac{m}{R}\,\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Les asymptotes de cette trajectoire s'obtiennent en faisant $\frac{y}{x}$ très grand dans cette formule. D'où :

$$x = R \pm \frac{2m}{R}\,y\,;$$

leur angle est donc égal à $\frac{4m}{R}$.

Note 10 (p. 156).

Ecrivons l'élément linéaire sous la forme :

$$ds^2 = -\left(1 + a\frac{m}{r} + \ldots\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 + \left(1 + b\frac{m}{r} + c\frac{m^2}{r^2} + \ldots\right) dt^2\,;$$

la loi approchée de Newton donne $b = -2$; la direction observée des rayons lumineux donne ensuite à a la valeur $+2$; a et b étant trouvés, le mouvement du périhélie de Mercure fixe enfin c égal à 0.

Introduire un coefficient arbitraire de $r^2 d\theta^2$ reviendrait simplement à changer le système de coordonnées ; par conséquent, on ne peut par ce moyen arriver à un espace-temps intrinsèquement différent. On voit donc que dans les limites de la précision adoptée, l'expression trouvée par Einstein peut se déterminer complètement par l'observation.

On peut remarquer que l'élément linéaire

$$ds^2 = -\,dr^2 - r^2 d\theta^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2$$

ne donne que la moitié de la déviation observée pour la lumière, et le tiers du mouvement réel du périhélie de Mercure. Comme

ce sont les résultats que permettaient d'atteindre les anciennes théories quand on tenait compte de la variation de la masse avec la vitesse, on voit que le point essentiellement nouveau de la théorie d'Einstein, ce fut l'introduction du coefficient $\frac{1}{\gamma}$ de dr^2.

Note 11 (p. 163).

On admet souvent que le principe d'équivalence nous autorise à dire que toute propriété invariante que l'on rencontre à l'extérieur d'un champ de gravitation, est également valable à l'intérieur d'un tel champ ; mais il y a nécessairement une certaine restriction à cette équivalence. Considérons, par exemple, les deux équations invariantes :

$$ds^2 = 1$$
$$ds^2 \left(1 + k^4 B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} B^{\mu\nu\sigma}_{\rho}\right) = 1$$

où k est une constante ayant les dimensions d'une longueur. Comme $B^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ s'annule à l'extérieur d'un champ de gravitation, si l'une de ces équations est vraie, l'autre devra l'être également. Or il est évident qu'elles ne peuvent toutes deux s'appliquer à un champ de gravitation puisqu'alors $B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} B^{\mu\nu\sigma}_{\rho}$ n'est pas nul et qu'il est en fait égal à $\frac{48\, m^2}{r^6}$. (Je crois que le facteur numérique 48 est correct ; pour montrer la longueur de ce calcul, qu'il me suffise de dire que l'expression contient 65.536 termes parmi lesquels il faut rechercher ceux qui ne s'annulent pas).

Tant que l'on s'en tient au raisonnement général, il semble n'y avoir pas plus de raisons pour prendre ds^2, plutôt que $ds^2 \left(1 + 48 \frac{k^4 m^2}{r^6}\right)$ ou toute expression du même genre, comme caractère invariant de la vibration d'un atome (*Partie Théorique*, § 33).

Note 12 (p. 167).

Considérons deux rayons lumineux qui divergent à partir d'un certain point situé à une distance R d'une étoile de masse m, et qui passent aux distances r et $r + dr$ de cette étoile. La déviation étant de $\frac{4m}{r}$, la divergence augmente de la quantité $\frac{4mdr}{r^2}$; cet accroissement sera égal à la déviation primitive $\frac{dr}{R}$ si $r = \sqrt{4mR}$. Pour $4m = 10$ km., $R = 10^{15}$ km., r est égal à 10^8 km. La divergence de la lumière doublera donc quand la déviation réelle de la lumière sera de 10^{-7}, ou 0'',02. Dans le cas d'une étoile qui par rapport à nous serait derrière le Soleil, la divergence primitive des rayons n'aurait pas le temps de s'accroître ; au contraire, si la lumière provenant d'une étoile doit parcourir une distance stellaire après que la déviation s'est produite, l'éclat de l'étoile se trouve affaibli, par suite de l'accroissement de la divergence. En général, dans les phénomènes stellaires, l'affaiblissement de l'éclat serait plus facilement observable que la déviation réelle des rayons lumineux.

Note 13 (p. 175).

Les relations sont (*Partie Théorique*, § 38) :

$$G^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x_{\mu}} \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4),$$

où $G^{\nu}_{\mu\nu}$ est la dérivée covariante (contractée) de G^{ν}_{μ}, ou $g^{\nu\alpha}G_{\mu\alpha}$.

Je doute que l'on ait jamais entrepris le travail laborieux de vérifier toutes ces formules par l'algèbre ordinaire.

Note 14 (p. 197).

La loi modifiée pour un espace-temps sphérique est, dans une région vide :

$$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}.$$

Dans un espace-temps cylindrique, la matière est indispensable et la loi, dans une région occupée par de la matière, est :

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (G - 2\lambda) = - 8\pi T_{\mu\nu},$$

le terme 2λ étant la seule modification introduite dans l'expression de la loi primitive. L'espace-temps sphérique de rayon R est donné par $\lambda = \frac{3}{R^2}$; l'espace-temps cylindrique par $\lambda = \frac{1}{R^2}$, pourvu qu'il y ait de la matière dont la densité moyenne soit $\rho = \frac{1}{4\pi R^2}$. La masse totale de matière contenue dans l'Univers cylindrique est $\frac{1}{2}\pi R$; elle doit être énorme, si l'on prend comme point de comparaison le Soleil dont la masse n'est que de 1,5 kilomètres.

Note 15 (p. 215).

Voir *Partie Théorique,* § 50. Weyl a publié sa théorie dans les *Berlin. Sitzungsberichte,* 30 Mai 1918 ; *Annalen der Physik,* Bd. 59 (1919), p. 101. Elle se trouve également dans la troisième édition de son traité : *Raum, Zeit, Materie.*

Note 16 (p. 218).

L'argument est en réalité plus complexe qu'il ne le paraît dans le texte, car nous n'avons fait aucune distinction entre la densité et l'action dans une région, la courbure et la courbure totale dans cette région. Si l'on considère une région bien délimitée de l'espace et du temps, son volume sera multiplié par 16 quand la jauge deviendra deux fois moindre. Par suite, pour la densité d'action nous devons choisir une expression qui prenne une valeur 16 fois moindre quand la jauge se trouve diminuée de moitié. Mais G est proportionnel à $\frac{1}{R^2}$ où R est le rayon de courbure ; il diminue donc dans le rapport de 4 à 1. L'invariant $B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} B^{\mu\nu\sigma}_{\rho}$ a mêmes dimensions (dans le système de jauges) que G^2 ; par suite quand on l'intègre à l'intérieur

d'un certain domaine d'Univers, il donne un nombre pur indépendant de la jauge. Dans la théorie de Weyl, cet invariant n'est que la partie gravitationnelle de l'invariant complet :

$$\left(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} - \frac{1}{2} g^{\rho}_{\mu} F_{\nu\sigma}\right)\left(B^{\mu\nu\sigma}_{\rho} - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\rho} F^{\nu\sigma}\right),$$

qui se réduit à :

$$B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} B^{\mu\nu\sigma}_{\rho} + F_{\nu\sigma} F^{\nu\sigma}.$$

Le deuxième terme donne l'expression bien connue de la densité d'action dans le champ électromagnétique, et ceci rend évidemment très probable l'identité de cet invariant avec la densité d'action.

La théorie d'Einstein, au contraire, crée là une ambiguïté car bien qu'il puisse y avoir une action dans un champ électromagnétique sans électrons, la courbure est nulle.

Note historique.

Avant l'expérience de Michelson-Morley, on avait longuement discuté pour savoir si l'éther situé à l'intérieur et au voisinage de la Terre subissait un entraînement du fait du mouvement terrestre, ou bien s'il passait librement au milieu des interstices séparant les atomes. L'aberration astronomique démontrait d'une manière catégorique l'immobilité de l'éther ; au contraire, Arago et Fizeau recherchant l'effet du mouvement d'un milieu transparent sur la vitesse de la lumière traversant ce milieu, firent des expériences qui décidèrent en faveur d'un entraînement partiel de l'éther par la matière en mouvement. Ces expériences étaient des expériences du premier ordre — c'est-à-dire qu'elles ne permettaient de mesurer que le terme du premier degré en fonction du rapport de la vitesse du milieu transparent à celle de la lumière. L'expérience de Michelson-Morley fut le premier exemple d'une expérience assez délicate pour avoir pu déceler des effets du second ordre, proportionnels au carré du rapport précédent ; ce résultat que nul courant d'éther traversant les objets terrestres ne pouvait être mis en évidence,

sembla confirmer l'hypothèse de l'entraînement total de l'éther par la Terre. Il fallut alors concilier ce point de vue avec le phénomène de l'aberration.

Cet essai fut tenté par Stokes ; mais sa théorie, toute mathématique, parut insoutenable. Lodge chercha expérimentalement si des corps plus petits entraînaient l'éther dans leur mouvement, et il montra que l'éther situé entre deux disques d'acier placés l'un en face de l'autre et tournant dans le même sens, ne subissait aucune modification.

Cette controverse de l'éther immobile et de l'éther entraîné passa alors par une phase du plus haut intérêt. En 1895, Lorentz discuta la question du point de vue de la théorie électrique de la lumière et de la matière. Par sa transformation célèbre des équations électromagnétiques, il fit disparaître toutes les difficultés relatives au premier ordre et montra que ces effets étaient tous compatibles avec l'hypothèse d'un éther immobile. En 1900, Larmor compléta la théorie pour les effets du second ordre et il parvint à donner une base théorique à l'hypothèse de la contraction imaginée en 1892 par Fitzgerald pour expliquer l'expérience de Michelson-Morley. La théorie de la fixité de l'éther était donc compatible avec tous les résultats expérimentaux, et ce fut elle qui subsista.

D'autres expériences du second ordre furent faites par Rayleigh et Brace sur la double réfraction (1902, 1904), Trouton et Noble sur le couple que devait subir un condensateur chargé (1905), Trouton et Rankine sur la conductibilité électrique (1908). Toutes montrèrent que le mouvement de la Terre n'avait aucun effet sur ces phénomènes. Au point de vue théorique, Lorentz (1902) établit que l'indifférence des équations du champ électromagnétique à toute vitesse des axes de référence, qu'il n'avait établie que pour le premier ordre et que Larmor avait complétée pour le second, existait pour tous les ordres. Cependant, il n'arrivait pas à établir avec la même rigueur une transformation correspondante pour des corps renfermant des électrons.

Larmor et Lorentz introduisirent tous deux un « temps local » pour le système mobile. Il était clair que pour nombre de phénomènes ce temps local devait remplacer le temps « réel » ; mais on ne faisait pas remarquer que l'observateur en mouve-

ment était nécessairement conduit à prendre ce temps local pour le temps réel. Einstein en 1905 introduisit le principe de relativité moderne en affirmant que le temps local était *le temps* pour l'observateur mobile ; il n'existait plus de temps réel ou absolu, mais seulement un temps local, variable d'un observateur à l'autre. Il prouva que la simultanéité absolue était liée à l'existence d'emplacements absolus dans l'espace d'une manière si étroite que rejeter la possibilité de cette dernière entraînait l'impossibilité de la première. En montrant qu'un observateur du système mobile mesurait toutes les vitesses au moyen de l'espace local et du temps local de ce système, Einstein fit disparaître les dernières difficultés qui subsistaient dans l'interprétation physique de la transformation de Lorentz.

On pouvait ainsi déduire immédiatement des principes relatifs à la mesure de l'espace et du temps la relation entre les coordonnées d'espace et de temps de deux observateurs en mouvement l'un par rapport à l'autre. Cette relation doit s'appliquer à tous les phénomènes pourvu que ceux-ci n'exigent pas la présence de quelque milieu permettant d'atteindre l'espace et le temps absolus. Nous avons dit plus haut que ces formules pouvaient se déduire par des calculs assez longs des équations de l'électromagnétisme ; cette déduction nous apparaît maintenant comme un cas particulier ; elle nous montre que les phénomènes électromagnétiques n'ont aucun rapport avec un milieu absolu au sens précédent.

La combinaison des espaces et des temps locaux d'Einstein en un espace-temps absolu à quatre dimensions fut l'œuvre de Minkowski (1908) et le Chapitre III de cet Ouvrage est en grande partie basé sur ses recherches. C'était un grand progrès que cette analyse de l'Univers par le vecteur à quatre dimensions ; mais la grosse simplification du problème fut apportée par Einstein et Grossmann grâce à l'emploi qu'ils firent de la puissante méthode de calcul de Riemann, Ricci et Levi-Civita.

En 1911, Einstein énonça le principe d'équivalence, orientant pour la première fois la question vers le problème de la gravitation. En affirmant que non seulement les phénomènes mécaniques mais aussi les phénomènes optiques et électriques qui se produisent dans un champ de gravitation ou dans le champ produit par l'accélération de l'observateur étaient équivalents,

il put prévoir le déplacement des raies du spectre solaire et la déviation de la lumière passant au voisinage du Soleil. Dans le dernier cas cependant, il ne prédisait que la demi-déviation, car il admettait encore la loi de gravitation de Newton. Freundlich, aussitôt, fit l'examen de photographies prises pendant des éclipses antérieures mais il ne trouva rien, faute d'une précision suffisante ; plus tard, voulant soumettre à l'expérience l'hypothèse d'Einstein, il partit en Russie et fit ses préparatifs pour observer l'éclipse de 1914, mais il ne put faire ses observations par suite de la déclaration de guerre. Un autre essai fut fait par l'Observatoire Lick lors de l'éclipse peu favorable de 1918. Seuls les résultats préliminaires furent publiés ; ils montraient que l'erreur accidentelle probable pour la déviation moyenne (rapportée au bord du disque solaire) était environ de 1'',6, de sorte qu'on n'en put tirer aucune conclusion.

Le principe d'équivalence rendit possible une théorie générale de la relativité non limitée aux mouvements uniformes, car il donna le moyen d'échapper aux objections que l'on n'avait cessé d'élever depuis Newton contre une pareille généralisation. Il parut tout d'abord que la possibilité de cette généralisation était bien aléatoire et que l'on était simplement en droit de ne pas considérer comme définitives toutes les objections formulées contre elle tant que n'auraient pas été envisagées toutes les complications possibles dues à la gravitation. En 1913, Einstein surmonta les principales difficultés. Sa théorie sous sa forme complète fut publiée en 1915 ; mais elle ne nous parvint qu'une année ou deux après. Comme c'est cette théorie qui est le sujet essentiel de ce Livre nous pouvons arrêter ici cette notice historique.

PARTIE THÉORIQUE

INTRODUCTION

La présente théorie mathématique suppose connu du lecteur tout ce qui a été exposé dans la première partie du Volume ; tous les raisonnements qui ont déjà été faits ne sont répétés ici que lorsque le symbolisme mathématique permet de leur donner une précision plus grande. Après la Section I, l'instrument mathématique devient d'un maniement assez délicat et seuls pourront aller jusqu'au bout de la théorie ceux qui voudront bien passer quelque temps à se familiariser avec lui. Le lecteur qui aura le temps non seulement d'apprendre, mais surtout de pratiquer le calcul tensoriel ne trouvera rien ici de nature à l'arrêter. Nous avons développé ce calcul en partant des bases les plus larges possibles et en le regardant non pas comme un mal inévitable à réduire le plus possible, mais comme le moyen le plus sûr de saisir la signification profonde de nos connaissances en physique. La physique est l'étude non pas des « choses » mais des mesures ; étant l'étude directe des relations qui unissent entre elles les mesures faites par différents observateurs sur les mêmes « choses », le calcul tensoriel est la clef de tous les progrès que l'on peut faire sur ce sujet.

Peut-être le trait le plus caractéristique de la théorie que nous allons développer, est-il qu'elle ne s'appuie sur aucun Principe de Moindre Action. Un principe de ce genre n'est introduit que dans le dernier paragraphe, encore n'est-ce que très accessoirement. Nous en verrons la raison dans la Section IV.

Parmi les nombreux travaux qui ont eu pour sujet cette théorie mathématique, je me suis plus spécialement inspiré de ceux d'Einstein et de de Sitter. Dans les dernières sections, je dois beaucoup au remarquable traité de Weyl « Raum, Zeit, Materie » (troisième édition. Julius Springer. Berlin). Les passages sont relativement rares où l'ordre dans le développement de la théorie que j'expose m'a permis de suivre sans modifica-

tion les travaux originaux, de sorte qu'il m'est impossible d'indiquer dans le détail les sources où j'ai puisé à chaque paragraphe. Je n'ose espérer qu'une analyse aussi complexe soit à l'abri de toute erreur ; mais si je dois avouer ma faillibilité, je n'aurai rien à regretter si cet aveu peut inciter le lecteur à soumettre les pages qui suivent à un examen attentif et à une critique sévère.

A.-S. Eddington.

Octobre 1920.

TABLE DES MATIÈRES DE LA PARTIE THÉORIQUE

SECTION I.

Principes élémentaires.

SECTION II.

Le Calcul Tensoriel.

Section III.

La loi de Gravitation.

Section IV.

Mécanique de la Relativité.

Section V.

Electricité.

SECTION I.

Principes élémentaires.

1. Indétermination du système de coordonnées.

Nous avons vu dans les premiers chapitres que des observateurs animés de mouvements différents faisaient de l'espace et du temps des mesures différentes, aucune d'elles ne pouvant être considérée comme plus fondamentale qu'une autre. *Nous nous proposons de construire une théorie de l'Univers qui reconnaisse formellement cette indétermination du système de mesures.* Avant les recherches d'Einstein, on n'avait jamais douté de l'existence d'un temps absolu et unique ; et la possibilité qu'un observateur en mouvement adoptât inconsciemment un temps fictif différent associé à un espace approprié, ne trouvait son explication que dans l'hypothèse entièrement gratuite de compensations particulières résultant des propriétés de la matière et des forces électromagnétiques. Mais aujourd'hui, la meilleure manière d'unifier nos conceptions, c'est de considérer la totalité des phénomènes comme associée à une indétermination complète du système espace-temps, indétermination due à la nature de notre science expérimentale.

On situe un événement à l'aide de quatre coordonnées x, y, z, t. Le système de coordonnées étant arbitraire, elles ne peuvent intervenir directement dans les processus de la nature. Pour un événement isolé, tel groupe de valeurs convient aussi bien que tel autre. Ce n'est que dans la considération des relations entre deux ou plusieurs événements que les coordonnées prennent une signification puisqu'elles définissent la situation relative des événements. Dans le cas de deux dimensions ,si nous nous donnons les coordonnées rectangulaires x, y, des diffé-

rents points d'une figure plane, nous avons une description complète de cette figure et nous pouvons la construire ; cependant, ces données sont surabondantes car elles impliquent un élément arbitraire (l'orientation) qui est étranger à ses propriétés géométriques et que l'on doit laisser de côté. D'autre part, nous pouvons fort bien décrire cette figure en nous donnant les distances séparant ses différents points pris deux à deux ; ce serait un procédé peu pratique bien souvent mais qui aurait l'avantage de n'introduire aucun élément étranger à ses propriétés, puisqu'il est muet sur l'orientation.

De même, notre description à l'aide des quatre coordonnées x, y, z, t, contient un élément arbitraire, analogue à l' « orientation », et qui n'a rien de commun avec la configuration de l'Univers. C'est cet élément arbitraire qui, dans tout système de coordonnées, est la cause de l'indétermination. Au contraire, les relations liant deux à deux les différents événements et qui sont analogues à la distance, contiennent tout ce qui a rapport à la configuration de l'Univers.

En conséquence, notre hypothèse fondamentale sera que *tout ce qui, dans notre science expérimentale, dépend de la situation des événements — tout ce que nous pouvons savoir sur leur configuration — est contenu dans la relation qui unit ces événements deux à deux.* Cette relation c'est l'*intervalle,* que nous désignons par ds.

Jamais nous ne séparerons l'une de l'autre ces deux méthodes de description de l'Univers par les $x, y, z, t,$ ou par le $ds,$ car toutes deux présentent des avantages : la première est simple et concise, la seconde permet d'interpréter directement l'expérience. Mais, dans l'emploi du premier procédé nous ne devons pas faire la faute d'attacher un sens au côté de la description qui n'en présente pas — de découvrir des différences là où il n'y en a pas. C'est seulement par l'intermédiaire du ds que notre science de l'Univers prend une forme indépendante de tout élément étranger.

La première chose à faire est donc de trouver la formule qui permet de passer de la description par les *coordonnées* à la description par les *intervalles.*

2. La forme quadratique fondamentale.

Considérons deux événements voisins, de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4), $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, x_4 + dx_4)$, dans un système de coordonnées quelconque. Nous admettrons que l'intervalle séparant ces deux événements est donné par :

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + g_{44}dx_4^2 \\ & + 2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + 2g_{14}dx_1dx_4 + 2g_{23}dx_2dx_3 \\ & + 2g_{24}dx_2dx_4 + 2g_{34}dx_3dx_4, \end{aligned} \tag{2, 1}$$

où les coefficients g_{11}, etc., sont des fonctions des coordonnées. En d'autres termes, nous admettons que le ds^2 est une certaine forme quadratique des différentielles des coordonnées.

Ce n'est pas là le cas le plus général que l'on puisse imaginer ; nous aurions pu, par exemple, poser ds^4 égal à une forme biquadratique des différences de coordonnées. Seulement, la forme que nous avons choisie est celle qu'exige l'expérience. Il est assez difficile de dire jusqu'à quel point c'est à une propriété spéciale de l'Univers extérieur à nous, que nous faisons appel, ou à une propriété de nous-mêmes, dans le choix des caractères de l'Univers qui nous sont accessibles par l'observation. Si la formule (2,1) est considérée comme exacte, elle différencie, semble-t-il, l'Univers réel de tous les autres Univers imaginables ; je crois que le plus vraisemblable est d'admettre que cette formule n'est vraie que statistiquement, que les g_{11}, etc., sont des moyennes statistiques que nous pourrions calculer dans tout Univers concevable à quatre dimensions.

Considérons une région suffisamment petite ou suffisamment homogène pour que l'on puisse regarder les g comme *constants*. Ecrivons :

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4, \quad y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4, \text{ etc.}$$

Nous pouvons choisir les 16 constantes a_1, b_1, etc., de telle sorte que (2,1) se réduise à :

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2. \tag{2,2}$$

En remplaçant dans (2,2) les y par leurs valeurs respectives et en comparant avec (2,1) nous obtenons seulement 10 équations pour déterminer 16 constantes de sorte que nous pouvons

faire la réduction à une somme de quatre carrés d'une infinité de manières. Nous admettrons, s'il le faut, des valeurs imaginaires des constantes.

Remarquons que cette réduction n'est pas possible en général pour une région étendue où les g doivent être considérés comme des fonctions variables et non plus comme des constantes.

Envisageons tous les événements pour lesquels y_4 a une certaine valeur. Ces événements formeront un Univers à trois dimensions. Pour ces événements, dy_4 étant nul, nous aurons :

$$ds^2 = dy_1{}^2 + dy_2{}^2 + dy_3{}^2. \qquad (2,3)$$

C'est précisément la relation qui nous est si familière dans notre espace ordinaire, ce que, dans notre science d'observation, nous appelons la distance entre deux points et que nous désignons par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad (2,4)$$

x, y, z étant des coordonnées rectangulaires.

Par suite, une section de l'Univers par $y_4 = c^{te}$ nous apparaîtra nécessairement comme un espace au sens ordinaire, et y_1, y_2, y_3 comme des coordonnées rectangulaires. Cette identification est inévitable car, d'après notre hypothèse primitive, toutes les propriétés observables ne prennent place dans les systèmes de coordonnées qu'en passant par le ds^2, de sorte que si la formule du ds^2 convient, il est inutile de rechercher quelque dissemblance s'opposant à cette identification.

Si nous nous donnons un certain système de coordonnées dans l'espace, nous chercherons si nous pouvons le qualifier de rectangulaire ou non en appliquant les constructions géométriques bien connues faites au moyen de règles et de compas. Ces constructions ne sont que de simples applications de la formule (2,4) qui lie les distances mesurées aux différences de coordonnées. Dire que les coordonnées sont rectangulaires signifie simplement pour nous que ces constructions sont possibles et que cette formule est satisfaite. Donc, quand nous trouvons comme en (2,3) que la formule est vérifiée, les coordonnées doivent être considérées comme rectangulaires.

Il nous faut cependant ajouter une condition. Les coordon-

nées y_1, y_2, y_3 pour des événements réels doivent être elles-mêmes réelles sinon la ressemblance avec notre espace ordinaire serait seulement formelle.

Supposons cette condition admise ; l'expression générale se trouve maintenant réduite à :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dy_4^2, \tag{2,5}$$

où x, y, z sont regardés comme des coordonnées rectangulaires d'espace. Evidemment y_4 doit contenir le temps sinon notre localisation des événements par quatre coordonnées serait incomplète ; mais nous ne devons pas l'identifier trop vite avec le temps pur.

Je pense que ce qui suit passera pour une définition satisfaisante de l'égalité d'intervalles dans le temps : étant donné un mécanisme doué d'un mouvement de révolution, ses différentes révolutions mesureront des intervalles dans le temps égaux en quelque *lieu* et à quelque *moment* que ce soit, pourvu que le mécanisme, les lois qui régissent son mouvement et l'état de l'espace environnant restent rigoureusement les mêmes.

Nous devons encore ajouter que le mécanisme doit, dans son ensemble, être au repos car nous avons vu qu'un mouvement rapide imprimé à une horloge influait sur sa marche. A l'ancien point de vue, cette condition du repos eût été comprise dans l'expression « états semblables de l'espace environnant », car le mouvement à travers l'éther était un des facteurs constituant l'état de cet espace environnant ; la théorie de la relativité, au contraire, n'attache pas de signification à un tel mouvement, et il est nécessaire d'énoncer explicitement la condition précédente.

Qu'entendons-nous par : le mécanisme et les lois qui régissent son mouvement doivent rester rigoureusement les mêmes ? Nous voulons dire que nulle différence observable ne peut être décelée ; ceci exige, comme nous l'avons vu, que les intervalles ds séparant les couples de points correspondants pris dans chacune des deux configurations comparées, doivent être égaux. En particulier, les intervalles séparant le début et la fin d'une révolution doivent être égaux.

Comme le mécanisme est, dans son ensemble, au repos et que, à la fin d'une révolution, les parties mobiles ont repris

leurs positions primitives, nous aurions pour les deux événements marquant le début et la fin d'une révolution :

$$dx,\ dy,\ dz = 0.$$

Donc :

$$ds = dy_4.$$

Ainsi dy_4 est le même pour toutes les révolutions quel que soit le lieu où elles se font ; des valeurs égales de dy_4 mesureront donc des intervalles dans le temps égaux. En d'autres termes, dy_4 est proportionnel à dt. C'est cette proportionnalité que nous traduisons par :

$$dy_4 = icdt, \tag{2,6}$$

où $i = \sqrt{-1}$ et c est une constante. Il est possible, bien entendu, que c soit un nombre imaginaire. (2,5) devient donc :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2. \tag{2,7}$$

En ce qui concerne la transformation qui nous a fait passer de l'expression (2,2) à l'expression (2,7), nous devons remarquer que nous avons identifié y_1, y_2, y_3 avec x, y, z respectivement, pour $dy_4 = 0$; nous avons identifié y_4 avec ict pour dy_1, dy_2, $dy_3 = 0$. Quand nous avons affaire à deux événements se passant en des endroits différents *et* à des moments différents, nous écrivons encore x, y, z, ict à la place de y_1, y_2, y_3, y_4 pour faciliter la nomenclature mais nous ne devons pas admettre sans discussion que les x, y, z, t sont ceux que l'on rencontre dans la physique courante. Nous sommes désireux de faire désigner à nos symboles les mêmes quantités que celles qu'ils désignaient dans la physique prérelativiste ; c'est chose possible dans les cas où il existait déjà une définition prérelativiste. Dans les autres cas, le physicien prérelativiste avait utilisé les symboles sans être capable de définir ce qu'ils désignaient ; aussi adopterons-nous une méthode différente, puisque c'est nous qui devons fournir une définition. Nous partirons de la définition provisoire donnée en (2,7) et nous montrerons au § 6 qu'elle est, en fait, d'accord avec le mode ordinaire de détermination d'un intervalle de temps entre deux événements qui ne se produisent pas à la même place.

3. La transformation de Lorentz.

Effectuons maintenant la transformation de coordonnées suivante :

$$\left.\begin{aligned} x &= \beta(x' - ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \beta\left(t' - \frac{ux'}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3, 1)$$

où $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$, u étant une constante réelle inférieure ou égale à c.

Il vient :

$$\begin{aligned} dx^2 - c^2dt^2 &= \beta^2(dx' - udt')^2 - c^2\beta^2\left(dt' - \frac{udx'}{c^2}\right)^2 \\ &= \beta^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)dx'^2 + \beta^2(u^2 - c^2)\,dt'^2 \\ &= dx'^2 - c^2dt'^2. \end{aligned}$$

D'après la formule (2,7) :

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2dt'^2. \qquad (3,2)$$

En opérant sur (3,2) comme nous l'avons fait sur (2,2), nous pouvons montrer que x', y', z' sont identifiables avec des coordonnées rectangulaires d'espace, et que dt' est proportionnel à l'intervalle de temps correspondant. Nous avons ainsi abouti à un autre mode possible de subdivision de l'espace-temps. Pour la commodité du langage nous dirons que le premier mode est relatif à un observateur S, le second à un observateurs S', ces deux observateurs étant au repos dans leurs espaces respectifs [1].

La constante u peut être facilement interprétée. S étant au repos dans son propre espace, sa position est définie par

[1] Ce n'est à proprement parler qu'une question de nomenclature. Un observateur peut toujours se forcer à « se souvenir qu'il est en mouvement » et à employer un autre espace ; il ne lui est pas si aisé de se contraindre à prendre le temps associé à cet espace. A moins qu'il ne conserve l'espace dans lequel il est au repos, il est sujet à employer un espace-temps hybride qui le conduirait à des difficultés et même à des contradictions.

$x = c^{te}$; mais d'après (3,1) ceci correspond à $x' - ut' = c^{te}$, ce qui est l'équation du mouvement d'un point se déplaçant avec une vitesse u dans la direction des x' dans l'espace et dans le temps de S'. u est donc la vitesse de S par rapport à S'.

Il ne s'ensuit pas immédiatement que $-u$ soit la vitesse de S' par rapport à S ; mais ceci peut être prouvé en résolvant les équations (3,2) par rapport à x', y', z', t'. On trouve :

$$\left.\begin{aligned} x' &= \beta(x + ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \beta\left(t + \frac{ux}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3, 3).$$

La transformation inverse se fait donc simplement en remplaçant u par $-u$.

Historiquement, cette transformation fut obtenue pour la première fois dans le cas particulier des équations électromagnétiques. Une méthode inductive pour les obtenir a été exposée dans la Note 3. Comme x, y, z, t ont la même forme de ds^2 que x', y', z', t' — voir (2,7) et (2,3) — et que d'après notre hypothèse fondamentale tout ce qui est observable se trouve inclus dans l'expression du ds^2, ces deux systèmes de subdivision de l'espace et du temps doivent être considérés comme absolument équivalents au point de vue de toutes les observations que l'on peut faire ; c'est là le point essentiel.

4. La vitesse de la lumière.

Considérons un point se mouvant le long de l'axe des x, sa vitesse par rapport à S' étant v' :

$$v' = \frac{dx'}{dt'} \cdot \qquad (4, 1)$$

D'après (3,1) sa vitesse par rapport à S est :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\beta(dx' - udt')}{\beta\left(dt' - \frac{udx'}{c^2}\right)} \cdot$$

En tenant compte de (4,1) cette expression devient :

$$v = \frac{v' - u}{1 - \frac{uv'}{c^2}} ; \qquad (4, 2)$$

elle diffère, comme on le voit, de la formule ordinaire de la mécanique :

$$v = v' - u.$$

Si deux points se meuvent par rapport à S' dans des directions opposées avec des vitesses respectivement égales à $+v'$ et $-v'$, leurs vitesses par rapport à S sont :

$$\frac{v' - u}{1 - \frac{uv'}{c^2}} \quad \text{et} \quad -\frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}.$$

Comme nous pouvions nous y attendre, ces vitesses sont en général inégales ; il y a cependant un cas singulier, c'est celui où $v' = c$. Les deux vitesses par rapport à S deviennent alors $+c$ et $-c$.

Plus généralement, pour une vitesse de direction quelconque nous avons d'après (2,7) :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - c^2$$
$$= v^2 - c^2,$$

de sorte que :

$$v = \sqrt{c^2 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2}. \qquad (4, 3)\ [1]$$

De même (3,2) nous donne :

$$v' = \sqrt{c^2 + \left(\frac{ds}{dt'}\right)^2}.$$

Si donc $v' = c$, $ds = 0$ et par suite $v = c$ quelle que soit la direction de la vitesse.

Nous en concluons que si un certain nombre de points se déplacent dans des directions différentes avec des vitesses égales par rapport à S', leurs vitesses par rapport à S ne seront plus, en général, égales ; néanmoins il faut en excepter une vitesse particulière c qui jouit de cette propriété remarquable que toute vitesse par rapport à S' égale à c est encore égale à c par rapport à S quelle que soit sa direction.

[1] Nous changerons plus loin le signe de ds^2 et la formule s'écrira :

$$v = \sqrt{c^2 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2}.$$

Au point de vue des théories anciennes admettant l'existence d'un espace et d'un temps absolus, ce résultat semble absurde. En outre, nous n'avons pas encore établi que nos formules ont une signification pratique puisque, jusqu'ici, rien n'empêcherait c d'avoir une valeur imaginaire. C'est l'expérience qui a montré l'existence d'une vitesse réelle — 300.000 km. par sec. — présentant ces propriétés extraordinaires ; cette vitesse, nous l'appellerons la *vitesse fondamentale*.

Par bonheur, il y a une entité physique — la lumière — qui se meut habituellement avec la vitesse fondamentale. Ce serait une erreur d'attribuer à la lumière le rôle capital que nous faisons jouer à la vitesse fondamentale ; néanmoins cette coïncidence heureuse nous est utile car elle rend cette vitesse directement accessible à l'expérience. L'expérience de Michelson-Morley échoua dans sa tentative de déceler une différence dans les vitesses de deux ondes lumineuses se déplaçant à angle droit l'une par rapport à l'autre. Six mois après cette expérience, le mouvement de la Terre sur son orbite avait modifié de 60 km./sec. la vitesse de l'observateur — ceci correspond au passage de l'observateur S' à l'observateur S —, mais l'expérience eut encore le même insuccès que la première fois (1). La vitesse de la lumière possède donc bien la propriété caractéristique de la vitesse fondamentale.

Nous devons remarquer que l'expérience de Michelson-Morley ne prouve pas que la vitesse de la lumière soit la même dans toutes les directions ; elle montre seulement que la vitesse *moyenne* d'aller et retour le long d'une certaine ligne, est indépendante de l'orientation de cette ligne. C'est pour cette raison que l'expérience doit être assez délicate pour déceler des différences de l'ordre de $\frac{u^2}{c^2}$ et non pas simplement de l'ordre de $\frac{u}{c}$. La substitution d'une vitesse moyenne d'aller et retour à la vitesse d'aller simple ne modifie pas essentiellement nos raisonnements ; cette vitesse sera la même dans toutes les directions à la fois pour S' et pour S si $v' = c$; il n'est pas difficile

(1) Ce n'est là que l'énoncé formel du résultat négatif de l'expérience. Nous n'avons pas fait appel à l'explication de Fitzgerald qui nous permet d'admettre cette conclusion en apparence impossible.

de montrer que v est la seule vitesse pour laquelle ce résultat surprenant soit vrai.

La loi de composition des vitesses (4,2) trouve une confirmation éclatante dans l'expérience de Fizeau sur la propagation de la lumière dans le sens d'un courant d'eau. Soient S' un observateur se déplaçant avec le courant et S un observateur fixe. L'eau est au repos pour S' ; la vitesse v' de la lumière par rapport à lui sera donc la vitesse ordinaire de la lumière dans l'eau, c'est-à-dire $\frac{c}{n}$, n étant l'indice de réfraction. Si u est la vitesse du courant, la vitesse de S par rapport à S' sera $-u$, et la vitesse de la lumière par rapport à S sera d'après (4,1) :

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{nc}}$$

$$= \frac{c}{n} + u - \frac{u}{nc}\frac{c}{n}$$

en négligeant le carré de $\frac{u}{c}$:

$$= \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{4, 4}$$

La vitesse de la lumière ne s'accroît donc pas de la vitesse totale u du courant mais seulement de la fraction $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ de celle-ci. Pour l'eau cet accroissement de vitesse est moindre que $\frac{u}{2}$, ce qui est en parfait accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Fizeau en 1851.

La formule d'addition des vitesses nous montre qu'il est inutile de chercher à obtenir par voie d'addition une vitesse supérieure à c. Si par exemple deux particules A et B se meuvent dans des directions opposées l'une par rapport à l'autre, chacune avec la vitesse c par rapport à celui qui les observe, la vitesse de B pour un observateur attaché à A sera :

$$\frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c$$

et non $2c$ comme nous l'aurions admis dans la mécanique ordinaire.

5. Signification de la transformation de Lorentz.

Les expressions $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt'}$, que nous avons rencontrées dans les paragraphes précédents ressemblent par leur forme à des vitesses rapportées à l'espace et au temps de chaque observateur. Mais, comme il n'est pas possible d'affirmer que telle subdivision de l'espace et du temps est meilleure que telle autre, ces vitesses purement formelles devront être regardées comme les vitesses véritables, du moins autant que l'expression « vitesse véritable » a un sens. Néanmoins, la vitesse fondamentale a des propriétés qui nous semblent si paradoxales et qui choquent tellement nos idées courantes que nous avons hâte de leur trouver une explication dans la manière dont se comportent les horloges et les règles divisées qui servent à mesurer cette vitesse singulière. Nous sommes donc conduits à étudier de plus près la signification des équations de transformation (3,1) et (3,3).

La première équation dans (3,3) :

$$x' = \beta\,(x + ut), \qquad (5,1)$$

montre que S ne tient pas compte seulement du mouvement de l'origine de son système de coordonnées, mais qu'il divise toutes les longueurs de S' (mesurées dans la direction des x) par le facteur β. Si S' a une règle graduée (au repos par rapport à lui) qu'il qualifie de « mètre », S lui trouvera une longueur de $\frac{1}{\beta}$ mètres. Si maintenant S' tourne sa règle d'un angle droit et lui donne la direction des y, l'équation $y' = y$ nous montre que S ne verra aucune objection à ce que cette règle reçoive le nom de mètre. Pour S, une règle fixe pour S' subira une contraction dans le rapport de β à 1 quand on l'amènera de sa position transversale à sa position longitudinale.

Nous allons en général un peu plus loin et nous disons qu'une règle se contracte quand on lui communique un mouvement dans le sens de sa longueur. En réalité c'est soulever là une tout autre question. Quand le mètre de S' est dans sa position transversale, S admet également que c'est un mètre pour lui ; mais en sera-t-il encore de même si S arrête la règle dans son mouvement et l'amène au repos par rapport à lui ? Si non, la variation de longueur doit être régie par quelque loi ; sup-

posons donc que la règle orientée transversalement s'allonge en s'arrêtant ; sa longueur devient donc supérieure à un mètre pour S ; comme $y=y'$, S' aboutit à la même conclusion. Supposons maintenant que S' arrête la règle, elle s'allonge de nouveau ; et ainsi de suite indéfiniment, S amenant la règle au repos par rapport à lui, S' l'arrêtant ensuite et la règle devenant de plus en plus longue pour les deux observateurs à la fois. Il serait peut-être difficile de nier la possibilité d'un effet très petit de ce genre ; si vraiment un tel effet existait, il se trouverait supprimé par les mauvais traitements que, nécessairement, nous ferions subir à la règle dans l'application du régime précédent. Supposons encore que S et S' aient chacun un atome d'hydrogène au repos dans leurs espaces respectifs ; comme $y=y'$, ils sont d'accord pour attribuer aux atomes les mêmes dimensions transversales ; donc, par raison de symétrie, ils doivent en déduire que les dimensions transversales de l'atome d'hydrogène sont indépendantes de son état de mouvement ou de repos. L'effet du mouvement est par conséquent une contraction longitudinale et non une dilatation transversale de l'objet qui se meut.

Il était nécessaire que nous prenions la formule (5,1) et non l'équation inverse :

$$x=\beta\ (x'-ut')$$

qui, à première vue, semble montrer que S *multiplie* les longueurs de S' par β. Un peu de réflexion permet de voir que $(x'-ut')$ n'a pas de signification évidente pour S.

En ce qui concerne le retard dans le temps, l'équation :

$$t=\beta\left(t'-\frac{ux'}{c^2}\right) \qquad (5,\ 2)$$

montre que S multiplie par β les durées que marque une horloge au repos dans le système de S' ($x'=c^{te}$). Il faut par conséquent qu'il ait jugé qu'une horloge en mouvement par rapport à lui marche plus lentement.

Nous avons déduit la contraction d'une règle matérielle et le ralentissement de la marche d'une horloge matérielle de l'étude des propriétés de l'espace et du temps. Il n'y a rien à reprocher à ce raisonnement car les propriétés de l'espace et du

temps comprennent comme cas particulier les propriétés de la matière. Les propriétés de configuration (géométriques) de l'Univers sont indiscernables de ses propriétés d'extension. Par suite, la manière dont se comporte la matière à l'égard de l'espace et du temps est implicitement décrite dans les axiomes de la géométrie de l'espace-temps et nous n'avons rien fait d'autre dans ce paragraphe que de l'expliciter. Cette description explicite nous aidera peut-être à comprendre les résultats surprenants de l'expérience de Michelson-Morley ; cependant il faut avouer que si nous nous étions proposé d'éviter le paradoxe, nous n'avons pas été très heureux. L'équation (3,3) nous a montré que les règles divisées de S' sont contractées par rapport à celles de S ; mais (3,1) nous montrerait pareillement que pour S' les règles graduées de S sont contractées par rapport aux siennes. Nous ne pouvons éviter le paradoxe qu'en reconnaissant la relativité de la longueur et de la durée, et en rejetant *a priori* tout ce qui est fondé sur l'objectivité de la longueur.

En résumé, la localisation des événements dans un système d'espace-temps fait intervenir un facteur arbitraire et dépourvu de toute signification, qui vient s'ajouter à la définition parfaitement correcte de la configuration absolue de ces événements. Les localisations faites respectivement par S et S' concordent exactement pour tout ce qui présente une signification absolue ; elles ne sont plus d'accord, au contraire, en ce qui concerne ce facteur arbitraire. Le fait qu'une expérience telle que celle de Michelson-Morley donne le même résultat pour les deux observateurs, n'exige par suite aucune explication supplémentaire. Mais, presque tous les termes de la physique courante contiennent plus ou moins le facteur arbitraire dont nous venons de parler ; aussi, à moins de renoncer aux enseignements que les siècles accumulés nous ont donnés, nous devons chercher à rattacher tous ces termes à notre théorie, et c'est pour cela qu'il nous faut introduire des contractions de longueur, etc., qui n'ont pas de signification au point de vue absolu.

6. Simultanéité en des lieux différents.

L'expérience de Michelson-Morley compare la vitesse moyenne d'aller et retour de la lumière suivant une certaine

direction avec cette vitesse suivant une direction différente et elle montre l'égalité de ces deux vitesses. Nous ne pouvons prouver expérimentalement que la vitesse d'aller est égale à la vitesse de retour car, en y réfléchissant, on voit que cette question ne ressort pas du domaine de l'expérience, mais que c'est une pure affaire de convention. La comparaison des zéros du temps, c'est-à-dire la simultanéité en des lieux différents, dépasse l'observation et la définition que nous en donnons n'est en réalité qu'une convention entièrement arbitraire.

Examinons un peu la convention adoptée dans la pratique. Une « étoile nouvelle » fit son apparition en 1918 ; admettons que l'on ait mesuré sa parallaxe et que l'on ait trouvé pour sa valeur 0'',01 ; convertissons cette parallaxe en distance et divisons cette distance par la vitesse de la lumière ; nous trouvons que le temps mis par la lumière pour nous venir de l'étoile est de 330 années. Nous en concluons que l'étoile explosa en 1588 et nous disons que cette explosion et la destruction de l'Invincible Armada sont des événements simultanés. Or, les mesures expérimentales de la vitesse de la lumière (méthode de la roue dentée de Fizeau, par exemple) déterminent *toutes* une vitesse moyenne d'aller et retour. Nous avons *supposé* que les résultats de ces expériences étaient applicables dans le cas de la vitesse en trajet simple de l'étoile à la Terre ; c'est cette hypothèse qui constitue la convention sur laquelle s'appuie la définition de la simultanéité.

Quand on règle l'horloge de l'observatoire de Cambridge sur celle de l'observatoire de Paris au moyen des signaux horaires de la télégraphie sans fil, on fait usage de la même convention. La correction de la durée de propagation des signaux est calculée d'après l'hypothèse que leur vitesse de Paris à Cambridge est la même que celle de Cambridge à Paris. La méthode de réglage des horloges au moyens d'observations astronomiques est essentiellement de la même nature, la seule différence étant que les signaux lumineux célestes viennent se substituer aux signaux électromagnétiques terrestres. On a suggéré qu'il pouvait exister d'autres méthodes de détermination de la simultanéité, indépendantes des signaux lumineux et débarrassées du caractère conventionnel dont nous avons parlé ; mais, quelles que soient ces méthodes, il est toujours nécessaire d'introduire quelque convention.

Les équations dont nous nous sommes servis donnent à la vitesse de la lumière une même valeur quelle que soit la direction (§4) ; elles sont donc conformes à notre convention.

7. Transport des horloges.

L'équation $t=\beta\left(t'-\frac{ux'}{c^2}\right)$ nous montre que des événements en des lieux différents, simultanés pour S' — répondant à une même valeur de t' — ne seront plus simultanés pour S — ne correspondront plus à une même valeur de t. Un exemple intéressant de ce fait nous est fourni par la possibilité de déterminer la simultanéité en deux points distincts par le transport effectif d'une horloge d'un point à l'autre.

Considérons deux points A et B à une distance x' l'un de l'autre et fixes, par rapport à S'. Prenons une horloge en A et déplaçons-la doucement jusqu'en B en lui donnant par rapport à S' une vitesse du' pendant le temps $\frac{x'}{du'}$. Cette vitesse ralentira la marche de l'horloge dans le rapport de β à 1, β étant ici égal à $\left(1-\frac{du'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; pendant la durée du transport elle prend donc un retard que S' trouve égal à $\left[1-\left(1-\frac{du'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\frac{x'}{du'}$. Ce retard tend vers zéro quand du' tend lui-même vers zéro, de sorte que si l'horloge s'est déplacée avec une lenteur suffisante, S' trouve que son zéro n'a pas changé.

Par rapport à S maintenant, l'horloge, avant de se mettre en mouvement par rapport à S', possède déjà la vitesse u ; par conséquent, chacune des secondes qu'*elle* marque est la fraction $\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ d'une seconde de S. Du fait de sa petite variation de vitesse du par rapport à S — correspondant à sa vitesse du' par rapport à S' — elle éprouvera par seconde de S un retard supplémentaire de $\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} u\frac{du}{c^2}$ en secondes marquées par elle. Or, pour S, la durée du transport de l'horloge est $\frac{x'}{\beta du}$ secondes, β étant égal à $\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Son retard supplémen-

taire total à la fin de son déplacement sera donc $\beta u \frac{du}{c^2} \cdot \frac{x'}{\beta du} = \frac{ux'}{c^2}$ en secondes marquées par elle, c'est-à-dire $\frac{\beta ux'}{c^2}$ en secondes de S. Ainsi pour S l'horloge a son zéro déplacé de $\frac{\beta ux'}{c^2}$ quand on la transporte même très doucement de A en B alors que pour S' il n'y a pas de variation du zéro. Il est facile de voir que c'est précisément cette différence dans la simultanéité par rapport aux deux observateurs qui est traduite par la formule :

$$t = \beta \left(t' - \frac{ux'}{c^2}\right).$$

Cet exemple est instructif car il montre que les signaux lumineux ne jouent pas un rôle essentiel dans la discussion de la transformation de Lorentz. L'importance de la « vitesse fondamentale » ne dépend pas de la faculté que nous avons de déceler les ondes électromagnétiques. Cependant les équations utilisées dans ce paragraphe impliquent encore la convention que si la vitesse moyenne d'aller et retour est c, la notion de la simultanéité doit être telle que la vitesse aller et la vitesse retour soient séparément égales à c.

8. L'Univers à « 3 + 1 dimensions ».

Nous avons vu que dans n'importe quelle région suffisamment petite l'expression quadratique générale (2,1) de l'intervalle pouvait par un choix convenable des coordonnées, prendre la forme :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

et des expériences faites dans les régions qui nous sont accessibles nous montrent que c est réel et représente la vitesse de la lumière dans la région considérée. Les trois signes plus et le signe moins particularisent l'Univers d'une manière que nous n'aurions pas pu prédire *a priori*. H. Weyl a exprimé cette particularisation en disant que l'Univers est à « 3 + 1 dimensions ». On peut s'amuser à chercher les propriétés d'un Univers à 4 + 0, ou à 2 + 2 dimensions. Une question d'intérêt plus pratique est celle-ci : l'Univers peut-il changer de type ?

Certaines de ses régions inexplorées jusqu'à présent peuvent-elles être à $4+0$ dimensions ? Je ne pense pas, car si pareil Univers existait, il serait séparé du nôtre par une certaine région ; d'un côté de cette région on aurait :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_1{}^2 dt^2,$$

et de l'autre :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + c_2{}^2 dt^2.$$

Dans la région séparatrice on aurait donc :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 0 dt^2,$$

et la vitesse de la lumière y serait nulle (1). Rien ne pourrait donc franchir cette séparation, et l'Univers situé au-delà ne présenterait aucune relation d'espace et de temps avec le nôtre — en un mot, il n'existerait pas.

Les objections que soulève l'existence d'une région de l'Univers à $2+2$ dimensions sont moins évidentes ; mais il est sans doute inutile de prendre en considération sérieuse la possibilité de son existence.

9. Transformations de coordonnées.

Prenons de nouvelles variables x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, qui soient quatre fonctions quelconques des anciennes coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4. Inversement, les anciennes coordonnées sont des fonctions des nouvelles :

$$x_1 = f_1(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \quad , \quad x_2 = f_2(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), \text{ etc.}$$

On en déduit :

$$dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x'_2} dx'_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x'_3} dx'_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x'_4} dx'_4, \text{ etc.} \quad (9, 1)$$

(On peut généralement, sans risque d'erreur, écrire $\frac{\partial x_1}{\partial x'_1}$ au lieu de $\frac{\partial f_1}{\partial x'_1}$).

(1) Ceci n'a aucun rapport avec l'arrêt permanent de la lumière dans l'Univers de de Sitter (p. 199). Une barrière pour la lumière n'existait essentiellement que par rapport au système de coordonnées d'un observateur éloigné et tout redevenait normal quand on prenait les coordonnées naturelles de ce lieu de repos. Au contraire, dans le cas actuel, aucun choix de coordonnées ne pourrait mettre la lumière en mouvement.

En portant dans (2,1), ds^2 devient une forme quadratique des nouvelles différentielles dx'_1, dx'_2, dx'_3, dx'_4 :

$$ds^2 = g'_{11}dx'^2_1 + g'_{22}dx'^2_2 + \ldots\ldots + 2g'_{12}dx'_1dx'_2 + \ldots.$$

La forme de cette expression n'est pas modifiée par une transformation de coordonnées et l'on peut aisément, si on le veut, trouver les valeurs des nouveaux coefficients g' en fonction des anciens.

Comme exemple, prenons la transformation permettant de passer d'un système de coordonnées d'espace rectangulaires et de temps (x, y, z, t) à des axes tournant autour de Oz avec la vitesse angulaire ω. Les formules de transformation sont :

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t' \\ y &= x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \qquad (9,\ 2)$$

D'où :

$$\left.\begin{aligned} dx &= dx' \cos \omega t' - dy' \sin \omega t' - (x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t')\, \omega dt' \\ dy &= dx' \sin \omega t' + dy' \cos \omega t' + (x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t')\, \omega dt' \\ dz &= dz' \\ dt &= dt' \end{aligned}\right\} (9, 3)$$

Choisissons les unités de façon que la vitesse de la lumière soit égale à l'unité. En portant les valeurs (9,3) dans (2,5) où $c = 1$,

$$\begin{aligned} ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - [1 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]\, dt'^2 \\ - 2\omega y' dx' dt' + 2\omega x' dy' dt'. \end{aligned} \qquad (9,\ 4)$$

Peut-être nous fera-t-on l'objection que notre transformation n'est pas rigoureuse parce que nous n'avons pas tenu compte des contractions des règles graduées et des retards des horloges du système tournant. Le temps t' du système en rotation doit légèrement différer du temps t. Mais savoir quel est le *temps* véritable dans ce système en rotation, c'est difficile. Nous ne pouvons placer en un point de ce système une horloge entièrement libre ; nous devons la *forcer* à rester au repos par rapport aux axes tournants, ce qui est en opposition avec la condition des « états semblables de l'espace environnant » mentionnée au § 2. En fait, l'observateur qui fait usage du système en rotation perçoit

un champ de force centrifuge qui bouleverse les principes simples adoptés jusqu'ici dans la mesure du temps et de l'espace. Nous sommes totalement incapables de dire par quelles conventions ou quels axiomes il remplacera vraisemblablement ces principes. (Le champ de force centrifuge que nous percevons du fait de la rotation de la Terre ne peut nous guider en rien car l'ambiguïté qu'il crée est trop petite pour avoir attiré notre attention). Tout ce que nous pouvons dire, c'est que l'observateur en rotation peut se servir des coordonnées x', y', z', t' s'il le veut, mais il peut tout aussi bien les remplacer par des coordonnées légèrement différentes par rapport auxquelles il soit encore au repos. Il semble ne pas y avoir de criterium évident pouvant fixer son choix.

Dire que t' est ou n'est pas le temps de l'observateur en rotation, n'a pas de signification précise. La signification exacte de t' doit être déterminée d'après l'équation (9,4) elle-même qui montre comment t' entre dans le ds^2 et de là dans les mesures expérimentales. Le même raisonnement s'applique à toutes les coordonnées. Si l'on met à part tout ce qu'on y rapporte, tous les systèmes de coordonnées sont semblables ; ce sont les rapports de l'Univers avec ces systèmes (sous la forme du ds^2) qui classent ceux-ci en rectangulaires, polaires, tournants, etc. Le nom qui sert à les désigner communément est souvent une indication par trop grossière et pour retrouver de la précision il faut se reporter à la forme du ds^2.

10. Champs de force.

Des coordonnées rectangulaires non accélérées et le temps qui leur correspond (coordonnées galiléennes) sont définis par l'expression suivante du ds^2 [1] :

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2. \qquad (10,1)$$

[1] Le mot « galiléen » a donc un sens plus spécial que le mot « euclidien ». Un système de coordonnées sera dit *galiléen* lorsque les événements sont rapportés à trois axes rectangulaires d'espace en mouvement de translation uniforme dans un Univers *euclidien*, le ds^2 prenant dans ce cas la forme simple (10,1).

(*Note du Trad.*).

(Le signe du ds^2 n'est plus le même que précédemment ; dorénavant, les intervalles dans le temps seront donc réels et les intervalles dans l'espace, imaginaires, au lieu du contraire. On ne gagne rien à faire ce changement, seulement il paraît plus conforme à la pratique courante).

Nous devons nous souvenir que notre discussion du § 2 au § 8 n'a de valeur que pour une région suffisamment petite ; en général, il n'est pas possible de choisir les coordonnées de manière que (2,1) se réduise à la forme (10,1) pour toute une région finie. Au Chapitre V nous avons fait voir que cette expression n'était applicable que dans un *genre d'espace-temps* particulier, appelé espace-temps euclidien ou plan.

L'impossibilité de trouver des coordonnées rigoureusement galiléennes n'arrête pas le physicien ; il en est quitte pour adopter des coordonnées ne présentant qu'approximativement ce caractère et les regarder comme exactement galiléennes. Bien entendu, pareil artifice entraîne des divergences avec l'observation ; le physicien, pour cacher ses torts, introduit alors des influences extérieures fictives — les champs de force — ayant pour rôle de faire disparaître ces divergences. C'est ainsi que, dans le cas des axes tournants, le retour aux coordonnées galiléennes s'accompagne nécessairement de l'introduction d'un champ de force centrifuge destiné à combler les écarts avec l'expérience qui proviennent de ce changement de coordonnées. Un champ de force, par conséquent, n'est autre chose qu'un aspect des défauts que présente le système de coordonnées que nous avons choisi par rapport à l'idéal galiléen. A ces défauts nous pouvons apporter un remède, ou nous ne le pouvons pas. Dans le premier cas la force est regardée comme une fiction mathématique. Si au contraire l'espace-temps n'est pas euclidien, il est impossible de trouver un système de coordonnées qui fasse totalement disparaître le défaut ; c'est précisément ce genre de défaut plus tenace qui se rencontre dans le voisinage d'une masse matérielle et que l'on regarde comme le champ de gravitation de cette masse.

Nous pouvons nous servir de coordonnées extrêmement différentes du type galiléen, comme les coordonnées polaires ou bipolaires, et néanmoins attribuer encore la divergence à des champs de force. Il est malcommode de traiter sur un pied dif-

férent les grandes divergences et les petites. Un champ de force peut provenir de ce que le système de coordonnées adopté n'est pas celui qui convient le mieux et qui réduit le ds^2 à sa forme la plus simple ; si nous introduisons la notion de champ de force, le seul moyen de rester d'accord avec nous-mêmes, est de la faire intervenir dans tous les cas où se rencontrent des divergences par rapport au système galiléen. Nous devons signaler que les coordonnées dont nous nous servons ordinairement sur la Terre ne peuvent passer pour très proches de l'idéal galiléen puisque l'écart qui les sépare ne peut être corrigé que par un champ de force nettement perceptible (le champ de gravitation terrestre).

En coordonnées ordinaires, une « ligne droite » est le lieu que représentent des équations linéaires entre les coordonnées ; nous conservons la même définition pour n'importe quel autre système [1]. Une ligne droite dépend donc du système de coordonnées choisi.

Nous avons vu au Chapitre IV que dans le mouvement d'une particule libre, la trajectoire décrite est telle que l'intervalle total entre deux quelconques de ses points est stationnaire :

$$\int ds \qquad \text{est stationnaire.} \qquad (10,2)$$

Si ds^2 a la valeur (10,1) il est facile de voir que le lieu est une droite dans le système de coordonnées x, y, z, t ;

[1] Quelques auteurs considèrent l'expression *ligne droite* comme synonyme du mot *géodésique*. Non seulement c'est faire perdre sa valeur à un mot important, mais en plus c'est inexact : même dans les systèmes de coordonnées que nous adoptons en pratique il n'y a réellement aucune ressemblance entre la géodésique (la ligne que suit un corps en chute libre) et la ligne droite (ce que vous essayez d'obtenir quand vous vous servez d'une règle). Dans ses débuts, la géométrie non euclidienne n'était qu'une pure conception et il était naturel de désigner ses différentes figures par les mêmes noms que les figures qui s'en rapprochaient le plus dans la géométrie euclidienne. La géodésique est, en fait, l'analogue de la droite euclidienne ; mais il n'en est plus du tout de même quand la géométrie non euclidienne est appliquée à l'Univers réel ; l'expression « ligne droite » n'est plus à la disposition du mathématicien puisqu'elle sert déjà à décrire un autre lieu dont nous avons tous une notion plus ou moins exacte. Sans doute la science se conserve-t-elle le droit de donner une définition nouvelle aux expressions courantes qui n'ont pas une

dans l'espace à trois dimensions la particule décrit une droite avec une vitesse constante et Newton aurait dit qu'elle ne subissait aucune force. Dans le cas général où ds^2 a la forme (2,1) le lieu est donné par des équations compliquées contenant les g ; nous les déduirons de (10,2) au § 20. Si l'on se place au point de vue de Newton, il faut alors faire intervenir un champ de force pour expliquer les écarts du lieu trouvé par rapport à la ligne droite.

Il faut bien se dire que la théorie de la relativité a ses méthodes propres pour énoncer les lois qui sont du domaine de la science expérimentale, et les expressions telles que « champ de force », « simultanéité », « temps d'un observateur tournant », n'y trouvent pas leur place marquée. Nous faisons de notre mieux pour fixer le sens exact (s'il y en a un) que la physique ordinaire attache à ces expressions, et pour trouver ce qu'elles deviennent dans notre théorie ; mais nous n'acceptons aucune responsabilité si leur adaptation n'est pas rigoureuse.

Pour l'étude détaillée des problèmes auxquels nous sommes conduits, nous avons recours à une méthode de calcul que nous allons maintenant développer.

précision suffisante ; ainsi, dans l'expression « corps noir », le mot *noir* a pu légitimement recevoir dans une définition nouvelle une signification théorique exacte. Mais il faut que cette appropriation de la science se fasse d'une manière modérée ; ce serait par exemple un véritable abus de sa part que d'appeler *noir* ce que l'on regarde habituellement comme *blanc*.

SECTION II.

Le Calcul Tensoriel.

11. Vecteurs contrevariants et vecteurs covariants.

Envisageons les transformations d'un système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) en un autre système (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4).

Les quantités dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, sont transformées selon les équations (9, 1). Donc :

$$dx'_1 = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_4} dx_4, \text{etc.} \qquad (11, 0)$$

ce que l'on écrit pour abréger :

$$dx'_\mu = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} dx_\alpha ,$$

et l'on obtient quatre équations en faisant successivement $\mu = 1, 2, 3, 4$.

Tout groupe de quatre quantités qui se transforment selon la loi précédente, constitue un *vecteur contrevariant* ; autrement dit, si (A^1, A^2, A^3, A^4) devient dans les nouvelles coordonnées (A'^1, A'^2, A'^3, A'^4) où :

$$A'^\mu = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} A^\alpha , \qquad (11, 1)$$

(A^1, A^2, A^3, A^4) que l'on synthétise sous la forme A^μ est un vecteur contrevariant (μ étant un indice et non un exposant).

Soit maintenant φ une fonction de point invariante (c'est-à-dire qui n'est pas altérée par un changement de coordonnées) ; les

quantités $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}$, se transforment selon l'équation :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x'_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x'_1} \text{ etc.} \quad (11, 15)$$

Tout groupe de quatre quantités qui se transforment selon cette loi, s'appelle un *vecteur covariant.* Si donc A_μ est un vecteur covariant :

$$A'_\mu = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} A_\alpha \,. \quad (11, 2)$$

Un vecteur covariant n'est pas nécessairement le gradient d'un invariant. En fait, un vecteur peut ne pas être une fonction de point car il peut n'être défini que pour un point particulier ; nous pouvons avoir un « vecteur isolé » ou un « champ de vecteurs ».

Généralement l'indice est placé en haut ou en bas suivant qu'il y a contrevariance ou covariance. A noter cependant que dx_μ est un vecteur contrevariant.

12. Le vecteur en mathématiques.

Les définitions du paragraphe précédent ne sont guère de nature à nous faire comprendre la signification du vecteur. Aussi allons-nous chercher une explication plus complète en prenant d'abord la notion mathématique de vecteur, qui est plus simple que la notion physique.

Considérons un groupe de quatre nombres (A_1, A_2, A_3, A_4) associés à un certain point (x_1, x_2, x_3, x_4) d'un système de coordonnées déterminé. Que vont devenir ces quatre nombres quand nous allons passer à un autre système de coordonnées ? La question ainsi posée n'a pas de sens. Les nombres ne « deviendront » pas automatiquement quelque chose ; à moins que nous ne les changions, ils resteront ce qu'ils sont ; mais le mathématicien peut dire : « Etant dans un certain système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4), je dois, à un certain point de mes raisonnements, introduire quatre nombres (A_1, A_2, A_3, A_4) ; si je me place dans un autre système (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4),

il me faudra, au même point de mes calculs, faire intervenir un autre groupe de quatre quantités (A'_1, A'_2, A'_3, A'_4) ; il me sera donc commode de désigner ces deux groupes par le même symbole $\mathcal{A}$. Vous saurez de quel groupe il s'agira, dès que je vous spécifierai le système de coordonnées que j'aurai adopté ».

A cela nous répondrons : « Voilà qui sera parfait si vous nous dites dès le début quels sont exactement les nombres que vous désignez par $\mathcal{A}$ dans chacun des systèmes de coordonnées que vous vous proposez d'utiliser. Vous ne devez pas simplement nous donner ces nombres pour un seul système et nous laisser le reste à deviner, car n'oubliez pas que le lien qui les unit est entièrement arbitraire et que c'est vous qui nous imposez celui que vous avez choisi ».

Le mathématicien commence donc par nous dresser la liste de ces nombres (que nous désignerons ici par des lettres). $\mathcal{A}$ signifiera :

X, Y, Z, pour les coordonnées rectangulaires x, y, z ;
R, Θ, Φ, pour les coordonnées polaires r, θ, φ ;
Λ, M, N, pour les coordonnées elliptiques λ, μ, ν.

« Mais », dit le mathématicien, « je n'aurai jamais fini à ce compte-là ! Les systèmes de coordonnées dont je puis avoir besoin sont en nombre infini. Je vois qu'il me faut changer de méthode. Au lieu de vous fixer les éléments de $\mathcal{A}$ dans chaque système, je vous donnerai une règle générale qui vous permettra de trouver vous-mêmes des valeurs pour un certain système connaissant celles qui correspondent à un autre système ».

En prenant cette décision, notre mathématicien restreint considérablement son pouvoir arbitraire car il trouvera sans peine qu'il n'y a pratiquement que deux règles indépendantes entre lesquelles il sera en droit de choisir.

Nous ne devons pas perdre de vue que X, Y, Z sont, ou du moins peuvent être, des nombres isolés ; il nous est donc interdit de faire intervenir leurs dérivées dans l'énoncé de la règle. Cette règle ne peut introduire que des combinaisons de X, Y, Z, et de coefficients calculés à partir des formules de transformation de coordonnées que nous nous serons données. De plus, c'est à *un* point de l'espace que nous avons affaire et seules,

par conséquent, ne peuvent intervenir que les différentielles des coordonnées ; il serait absurde de faire entrer les coordonnées elles-mêmes car celles-ci supposent une origine distante du point considéré et qui n'a rien à voir dans la question.

Voici une règle qui conviendrait :

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\partial r}{\partial x} X + \frac{\partial r}{\partial y} Y + \frac{\partial r}{\partial z} Z \\ \Theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} X + \frac{\partial \theta}{\partial y} Y + \frac{\partial \theta}{\partial z} Z \\ \Phi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y} Y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} Z \end{aligned}\right\} \qquad (12, 1)$$

La même loi nous donne :

$$\Lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial r} R + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \Theta + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \Phi.$$

Remplaçons dans cette dernière relation R, Θ, Φ, par leurs valeurs (12,1) ; il vient :

$$\begin{aligned} \Lambda = &\left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) X + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) Y \\ &+ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) Z \\ = &\frac{\partial \lambda}{\partial x} X + \frac{\partial \lambda}{\partial y} Y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} Z, \end{aligned}$$

ce qui est précisément ce que nous aurions trouvé en appliquant la règle pour calculer Λ à partir de X, Y, Z, au lieu de passer par R, Θ, Φ. C'est là une coïncidence heureuse propre à cette règle particulière, et qui est due à la relation :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Dans le nombre en apparence infini des règles possibles, il ne serait pas facile d'en trouver, en dehors de la précédente, beaucoup d'autres présentant une telle cohérence.

Cette règle que nous venons de signaler, c'est celle que nous avions déjà donnée en (11,1) dans la définition d'un vecteur contrevariant. La règle de définition du vecteur covariant est également cohérente. Je ne crois pas qu'il y en ait d'autres qui présentent ce caractère de conséquence intrinsèque et qui soient

applicables à un groupe de quatre quantités (ou trois quantités, si l'on s'en tient à trois dimensions). [1]

Nous voyons donc comment nous arrivons au vecteur mathématique. C'est un nom général servant à désigner une infinité de groupes de quantités, chaque groupe correspondant à un système particulier de l'infinité des systèmes de coordonnées. La quantité (R, Θ, Φ) n'est en rien semblable à la quantité (X, Y, Z), bien que ces deux quantités portent le même nom. Cela n'a aucun sens de demander si une quantité définie seulement dans un système de coordonnées est un vecteur ; le mathématicien est entièrement libre de décider que cette quantité sera un vecteur contrevariant ou covariant, ou ne sera pas un vecteur du tout.

13. Le vecteur en physique.

Les entités physiques absolues ou « états de l'Univers » n'entrent pas directement dans nos équations mathématiques ; elles n'y entrent que par leurs *mesures*. Tout nombre ou groupe de nombres susceptible de nous faire connaître d'une manière unique un tel état de l'Univers, peut être considéré comme une mesure de cet état ; par suite, deux états sont identiques si les nombres qui les mesurent sont égaux. On peut se placer à bien des points de vue différents pour associer à chaque état un nombre-mesure ; c'est ainsi qu'une masse en grammes et une énergie en ergs ne sont que deux modes différents de mesurer une seule entité ; pour prendre un exemple plus simple, la masse en grammes et la masse en livres donnent des nombres différents pour la mesure de la même entité. Ainsi, une équation qui exprime l'équivalence de deux entités physiques peut prendre arithmétiquement une infinité de formes correspondant aux différents modes de détermination des nombres-mesures.

(1) Sous réserve qu'il est toujours possible de multiplier par une puissance quelconque du jacobien de la transformation, puisque :

$$\frac{\partial(\lambda, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(\lambda, \mu, \nu)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \frac{\partial(r, \theta \varphi)}{\partial(x, y, z)}.$$

Ces règles plus compliquées correspondent à des tenseurs d'ordre supérieur dégénérés, dont nous parlerons plus tard.

Le cas le plus simple est celui où l'entité physique se trouve définie par un seul nombre, comme par exemple l'intervalle ou la courbure totale. Dans ce cas, la transformation qui fait passer d'un mode de détermination du nombre-mesure à un autre, prend le nom de « changement d'unités ». On se sert parfois d'équations qui ne sont valables que pour un système particulier d'unités ; mais le plus souvent, les équations s'appliquent quelles que soient les unités ; autrement dit, les différentes équations arithmétiques qui correspondent aux différents modes de détermination du nombre-mesure, se confondent toutes en une expression algébrique unique. Tout le monde sait que dans une équation générale, les « dimensions physiques » de tous les termes séparés doivent être les mêmes, de sorte qu'un changement du système de mesure modifie tous ces termes dans le même rapport.

Nombre d'entités physiques, pour être définies, nécessitent un groupe de quatre nombres-mesures. Deux de ces entités ne sont identiques que si les quatre nombres-mesures — ou « composantes » — de l'une, sont égaux respectivement aux quatre composantes de l'autre. Dans ce cas, le nombre des modes de détermination des nombres-mesures est incomparablement plus grand que précédemment. Le passage d'un de ces modes à un autre constitue une « transformation de coordonnées ». Dans le dernier paragraphe, nous avons vu que le mathématicien pouvait faire correspondre à chacun des différents systèmes de coordonnées un groupe particulier de quatre nombres suivant l'une ou l'autre des deux règles vectorielles énoncées. Le physicien *fait l'inverse,* et il fait correspondre les systèmes de coordonnées à ses groupes de nombres-mesures, en s'appuyant sur les mêmes règles vectorielles. Suivant la loi qu'il choisit, il identifie à volonté ses entités physiques avec des vecteurs covariants ou avec des vecteurs contrevariants. Il y a pourtant une entité — le déplacement entre deux points voisins, de composantes dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 — qu'il considère toujours comme contrevariante et satisfaisant à (11,0). Ceci a pour effet d'introduire dans l'Univers le système de coordonnées correspondant qui, primitivement, était purement abstrait, et de lui faire jouer le role d'un système de mailles réel ; il en résulte une correspondance géométrique entre le *système de mesures* qui

donne la *grandeur* du déplacement, et le *système de coordonnées* qui sert à le *situer*.

Il existe d'autres états de l'Univers qui, pour leur détermination, nécessitent 16, 64, 256, ... nombres-mesures. On les appelle des tenseurs et on les traite à peu près comme précédemment. Toute équation physique exprime l'égalité de deux pareils états, ou bien l'identité de deux aspects différents du même état. Une équation vraiment générale ne doit pas dépendre du mode de détermination des nombres-mesures. Tel sera le cas lorsque les nombres-mesures de chacun des termes de l'équation se transformeront selon la même règle ; en d'autres termes, ils devront avoir les mêmes dimensions physiques et le même degré de covariance et de contrevariance. L'emploi de ces équations générales dites « équations covariantes » qui conservent la même forme quels que soient la transformation de coordonnées et le changement d'unités effectués, est ce qu'il y a de plus nouveau dans la partie mathématique de l'œuvre d'Einstein.

Le plus souvent, une quantité physique, la force par exemple, n'a été définie qu'en coordonnées rectangulaires (où il n'y a pas lieu de distinguer entre la covariance et la contrevariance), et nous pouvons regarder le vecteur physique qui la représente comme de l'une ou de l'autre classe ; nous pouvons encore dire que le vecteur physique absolu n'est ni covariant ni contrevariant, mais qu'il a des composantes à la fois covariantes et contrevariantes. Si, par exemple, nous prenons la définition générale :

$$\text{force} = \text{masse} \times \text{accélération},$$

la force est un vecteur contrevariant ; si au contraire nous prenons :

$$\text{travail} = \text{force} \times \text{déplacement},$$

la force est covariante. Que nous nous servions de la mesure covariante ou de la mesure contrevariante de la force, c'est toujours la même entité physique que nous avons dans l'esprit ; mais, si nous introduisons la force dans une équation quelconque, il est nécessaire d'indiquer quelle mesure nous en faisons. Il est à remarquer que ce que nous appelons les composantes polaires de la force dans la dynamique du point maté-

riel, ce sont simplement des composantes rectangulaires selon des directions dépendant du point considéré ; ce ne sont pas les composantes polaires covariantes ou contrevariantes de la théorie actuelle.

Donc, au point de vue physique, la transformation de coordonnées doit être regardée comme un cas particulier, et non comme la cause d'un changement arbitraire du système de mesures. Covariance et contrevariance ne sont qu'une généralisation de la notion de *dimension* d'une quantité physique. Nos indices supérieurs et inférieurs servent à indiquer ce que l'on peut appeler les « dimensions tensorielles » des termes de nos équations ; et dans toute équation générale ces dimensions tensorielles doivent, comme les dimensions physiques ordinaires, être les mêmes pour tous les termes.

Nos preuves seront des preuves mathématiques de sorte que la considération de vecteurs autres que le vecteur mathématique peut paraître superflue ; cependant, la notion un peu vague, il est vrai, de vecteur physique peut être de nature à préciser le sens de notre méthode. C'est presque une chose au-dessus de nos moyens d'arriver à concevoir un objet ou une relation de la nature qui ne soit pas une simple quantité mais qui soit mesurable par quatre ou plus de quatre nombres variables avec le système de mesures adopté. Peut-être aussi avons-nous été trop vite à penser que nous avions vraiment saisi cette conception plus simple d'une quantité absolue mesurable par un seul nombre, ce nombre variant avec le système de mesures ou d'unités adopté.

14. La convention de sommation.

Nous ferons la convention que chaque fois qu'un indice littéral figure deux fois dans un certain terme, ce terme doit être sommé pour les valeurs 1, 2, 3, 4, de l'indice. Ainsi (2,1) s'écrira :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \ , \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}) \ ; \qquad (14, 1)$$

μ et ν figurant chacun deux fois dans le deuxième membre de la relation, cela indique que nous avons à effectuer la sommation $\sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4}$.

De même dans l'équation :

$$A'_\mu = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} A_\alpha$$

μ ne figure qu'une fois dans le terme à droite, de sorte que la sommation ne doit être faite que par rapport à α et l'équation est équivalente à (11,2).

Cette convention ne sert pas seulement à abréger l'écriture ; elle apporte une aide considérable à l'analyse car elle lui donne une sorte d'impulsion dans une direction qui se trouve être toujours la bonne [1].

Voici encore deux règles constamment employées :

a) Tout indice littéral figurant deux fois dans un terme n'a pas de signification propre — nous l'appellerons indice « muet » — et peut être à volonté remplacé par un indice différent pourvu que ce dernier indice ne figure pas déjà dans le terme considéré. Par exemple :

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\nu \partial x'_\lambda} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} = g_{\beta\alpha} \frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\nu \partial x'_\lambda} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}, \tag{14, 2}$$

car nous pouvons échanger α et β.

b) Nous avons :

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu} = \begin{cases} 0 \text{ si } \mu \neq \nu, \\ 1 \text{ si } \mu = \nu. \end{cases} \tag{14, 3}$$

La première égalité résulte du développement du premier membre par la sommation correspondant aux valeurs 1, 2, 3, 4, de α. Le plus, comme x_μ et x_ν sont des coordonnées indépendantes du même système, leurs variations sont également indépendantes sauf dans le cas où x_μ et x_ν sont une seule et même coordonnée.

Il est à remarquer que $\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu}$ quand $\mu = \nu$ n'a pas la même

[1] Les cas, peu fréquents du reste, où la sommation ne devra pas être effectuée seront toujours indiqués d'une manière explicite.

(*Note du Trad.*).

signification que $\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\mu}$; cette dernière quantité est, d'après notre convention, égale à $1 + 1 + 1 + 1$.

15. Tenseurs.

Les deux lois de transformation de vecteurs données au § 11 prennent maintenant la forme :

$$\text{vecteurs contrevariants : } A'^\mu = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} A^\alpha , \qquad (15, 11)$$

$$\text{vecteurs covariants : } A'_\mu = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} A_\alpha . \qquad (15, 12)$$

Nous pouvons désigner par $A_{\mu\nu}$ une quantité possédant 16 composantes obtenues en donnant tour à tour à μ et ν toutes les valeurs de 1 à 4. De même $A_{\mu\nu\sigma}$ a 64 composantes. Nous classons les différentes quantités de ce type suivant leurs lois possibles de transformation en :

$$\text{tenseurs contrevariants : } A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} A^{\alpha\beta}, \qquad (15, 21)$$

$$\text{tenseurs covariants : } A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta}, \qquad (15, 22)$$

$$\text{tenseurs mixtes : } A'^\nu_\mu = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} A^\beta_\alpha . \qquad (15, 23)$$

De même pour les tenseurs d'ordre supérieur :

$$A'^\tau_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\delta} A^\delta_{\alpha\beta\gamma} . \qquad (15, 3)$$

Signalons que l'équation (15,3) symbolise 256 équations distinctes dont les membres de droite contiennent chacun 256 termes.

Le mot *tenseur* est un terme général qui comprend en particulier les vecteurs (tenseurs du premier ordre) et les invariants ou scalaires [1] (tenseurs d'ordre nul).

[1] *Invariant* et *scalaire* sont synonymes.

La somme de deux tenseurs de même type est évidemment un tenseur du même type.

Le produit de deux tenseurs tels que $A_{\mu\nu}$ et B^{τ}_{σ} est un tenseur de la forme $A^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$. Ceci est évident d'après les lois de transformation.

Un tenseur du second ordre ou d'un ordre supérieur n'est pas nécessairement le produit de deux tenseurs d'ordre inférieur.

Un exemple courant d'un tenseur du second ordre nous est fourni par les tensions internes d'un solide ou d'un fluide visqueux. La composante de tension désignée par p_{xy} est une tension dans le sens de l'axe des y et s'exerçant sur une aire normale à l'axe des x. Chaque composante est donc associée à deux directions.

16. Produit intérieur — Contraction — Loi du quotient.

Si nous multiplions A_{μ} par B^{ν}, nous obtenons seize quantités A_1B^1, A_2B^1, A_2B^2, etc., qui constituent un tenseur. Considérons les quatre éléments principaux A_1B^1, A_2B^2, A_3B^3, A_4B^4 ; nous chercherons naturellement à les mettre sous la forme $A_{\mu}\, B^{\mu}$; mais la convention de sommation montre que cette forme symbolise la somme des quatre éléments. C'est la convention qui a raison car, pris individuellement, ces éléments ne nous sont pas utiles ; seule leur somme présente de l'importance.

$A_{\mu}\, B^{\mu}$ est ce que l'on appelle le *produit intérieur* (1) des deux vecteurs par opposition à leur *produit extérieur* ordinaire $A_{\mu}\, B^{\nu}$.

Par un procédé en tous points semblable, nous pouvons à partir d'un tenseur mixte quelconque $A^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$ former un tenseur « contracté » $A^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}$ ayant son ordre abaissé de deux unités puisque σ a perdu son individualité et n'est plus qu'un indice muet. Pour montrer que nous formons bien un tenseur, faisons dans (15,3) $\tau = \sigma$:

(1) C'est la même chose que le *produit scalaire* mais le produit extérieur n'est pas équivalent au *produit vectoriel* de la théorie élémentaire.

$$A'^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\delta} A^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$$

$$= \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\delta} A^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} \qquad \text{d'après (14, 3)}$$

$$= \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma} + 0 + 0 + 0$$

en prenant successivement les quatre valeurs de δ, à savoir γ et les trois autres valeurs.

Or nous retrouvons la loi de transformation (15,22), ce qui nous montre que $A^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}$ est un tenseur covariant analogue à $A_{\mu\nu}$.

L'expression $A^{\tau}_{\mu\sigma\sigma}$ n'est pas un tenseur et ne présente aucun intérêt.

La même méthode permet de montrer que A^{μ}_{μ}, $A^{\mu\nu}_{\mu\nu}$, $A_{\mu} B^{\mu}$ sont des invariants ou tenseurs d'ordre nul. En résumé, si un indice supérieur et un indice inférieur sont identiques, les qualités correspondantes de contrevariance et de covariance se détruisent mutuellement.

Si une quantité peut s'exprimer symboliquement comme le *quotient* de deux tenseurs, elle est elle-même un tenseur. Si par exemple :

$$A(\mu\nu) B_{\nu\sigma} = C_{\mu\sigma}$$

où la nature de $A(\mu\nu)$ est primitivement inconnue, l'équation montre que ce doit être un tenseur du type A^{ν}_{μ}, de façon à donner :

$$A^{\nu}_{\mu} B_{\nu\sigma} = C_{\mu\sigma}.$$

Ceci résulte des considérations exposées au § 13, et doit être regardé comme une généralisation naturelle du principe de l'homogénéité dans les dimensions, principe bien connu en physique.

Cette loi du quotient est des plus pratiques pour déterminer le type tensoriel d'une expression. Je ne pense pas qu'elle puisse jamais être mise en défaut, mais on ne peut prétendre

qu'elle ait la valeur d'une preuve rigoureuse. Dans la plupart des cas cette preuve peut être obtenue par l'application, parfois répétée plusieurs fois de suite, du théorème rigoureux suivant :

Toute quantité dont le produit *intérieur* par un vecteur covariant (ou contrevariant) *quelconque* est un tenseur, est elle-même un tenseur.

Supposons en effet que le produit de $A(\mu\nu)$ par B^{ν} soit un vecteur covariant, quel que soit le vecteur B^{ν}. D'après (15,12),

$$\left[A'(\mu\nu)\,B'^{\nu}\right] = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}}\left[A(\alpha\beta)\,B^{\beta}\right] ;$$

or, d'après (15,11) :

$$B^{\beta} = \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}}\,B'^{\nu} .$$

D'où :

$$B'^{\nu}\left[A'(\mu\nu) - \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}}\frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}}A(\alpha\beta)\right] = 0 ;$$

B'^{ν} étant arbitraire, la quantité entre les crochets est nulle, ce qui établit que $A(\mu\nu)$ obéit à la loi de définition des tenseurs covariants du deuxième ordre (15,22).

C'est ce théorème que nous appellerons la « loi rigoureuse du quotient ».

17. Les tenseurs fondamentaux.

dx_{μ} étant un vecteur contrevariant (11,0), il est préférable d'écrire cette quantité $(dx)^{\mu}$. Comme, d'après (14,1) :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu} = g_{\mu\nu}(dx)^{\mu}(dx)^{\nu},$$

il résulte des considérations exposées au § 16 que $g_{\mu\nu}$ est un tenseur covariant puisque ds^2 ne change pas par une transformation quelconque des coordonnées et que par suite c'est un invariant ou un tenseur d'ordre nul.

Pour ne laisser aucun doute dans la démonstration de cette proposition, il suffit d'appliquer deux fois de suite la loi rigou-

reuse du quotient; on établit d'abord que $g_{\mu\nu}(dx)^{\mu}$ est un vecteur covariant et ensuite que $g_{\mu\nu}$ est un tenseur covariant.

Soit g la valeur du déterminant du quatrième ordre ayant pour éléments les $g_{\mu\nu}$. Nous désignerons par $g^{\mu\nu}$ le mineur de $g_{\mu\nu}$ dans ce déterminant, divisé par g. Considérons l'expression $g_{\mu\nu}g^{\mu\sigma}$; si l'indice μ est regardé comme le numéro d'une colonne, les indices ν et σ définissent deux lignes qui peuvent être ou non la même. Nous avons à prendre successivement les quatre éléments de la ligne de rang ν et à les multiplier respectivement par les mineurs des éléments de même colonne de la ligne de rang σ ; nous devons faire la somme de tous ces produits et la diviser par la valeur du déterminant. Si $\nu = \sigma$ cette opération reproduit le déterminant divisé par lui-même, de sorte que le résultat est l'unité. Si $\nu \neq \sigma$, le numérateur forme un déterminant ayant deux lignes identiques et le résultat est nul. Nous écrivons donc :

$$g_\nu^\sigma = g_{\mu\nu}g^{\mu\sigma} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \sigma = \nu, \\ 0 & \text{si } \sigma \neq \nu. \end{array} \right\} \qquad (17, 1)$$

Remarquons que :

$$g_\nu^\nu = 4. \qquad (17, 15)$$

Si A^ν est un groupe *quelconque* de quatre quantités, nous avons d'après (17,1) :

$$g_\nu^\sigma A^\nu = A^\sigma + 0 + 0 + 0 ; \qquad (17, 2)$$

en d'autres termes g_ν^σ est un *opérateur de substitution*.

Si en particulier A^ν est un vecteur, le produit intérieur $g_\nu^\sigma A^\nu$ donne toujours un vecteur A^σ ; d'après la loi du quotient g_ν^σ est donc un tenseur. C'est un tenseur extrêmement remarquable car ses composantes conservent les mêmes valeurs dans tous les systèmes de coordonnées.

Enfin, comme $g_{\mu\nu}g^{\mu\sigma} = g_\nu^\sigma$ et que $g_{\mu\nu}$ et g_ν^σ sont deux tenseurs, il s'ensuit que $g^{\mu\sigma}$ est un tenseur. Nous avons donc défini trois *tenseurs fondamentaux*

$$g_{\mu\nu}, \qquad g_{\mu}^{\nu}, \qquad g^{\mu\nu},$$

qui sont respectivement des tenseurs covariant, mixte et contrevariant.

18. Tenseurs associés.

Pour faire passer un indice de bas en haut ou de haut en bas, il suffit d'appliquer les équations :

$$A^{\nu} = g^{\nu\alpha} A_{\alpha}, \qquad A_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\alpha} A_{\mu\alpha}, \qquad (18, 1)$$

$$A_{\nu} = g_{\nu\alpha} A^{\alpha}, \qquad A_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\alpha} A^{\nu\alpha}, \qquad (18, 2)$$

et de même pour les tenseurs d'ordres et de types différents.

Les vecteurs A_{ν} et A^{ν} sont dits associés l'un à l'autre ; les tenseurs $A_{\mu\nu}$, A_{μ}^{ν}, $A^{\mu\nu}$ sont également associés entre eux.

La définition précédente n'est pas en contradiction avec elle-même car si l'on élève un indice puis qu'on l'abaisse, on retrouve le tenseur d'où l'on est parti. En effet :

$$\begin{aligned} A_{\mu\beta} &= g_{\nu\beta} A_{\mu}^{\nu} = g_{\nu\beta} g^{\nu\alpha} A_{\mu\alpha} \\ &= g_{\beta}^{\alpha} A_{\mu\alpha} = A_{\mu\beta}, \qquad \text{d'après } (17, 2). \end{aligned}$$

Dans le cas de tenseurs non symétriques, il peut être nécessaire d'indiquer la place qu'occupait l'indice que l'on a fait passer en haut, de distinguer par exemple $A_{\mu}{}^{\nu}$ et $A^{\nu}{}_{\mu}$.

Avec les valeurs galiléennes des $g_{\mu\nu}$, élever ou abaisser un indice ne modifie pas les composantes d'un tenseur d'espace à trois dimensions, et change simplement le signe de quelques-uns des éléments d'un tenseur d'espace-temps à quatre dimensions. Nous pouvons donc en général utiliser un quelconque des tenseurs associés pour représenter une entité physique sans enfreindre les définitions prérelativistes. Comme nous l'avons déjà dit, une entité n'a en elle-même aucun caractère de covariance ou de contrevariance et ce sont ses composantes covariantes, contrevariantes et mixtes que mesurent les différents tenseurs associés. Le fait que l'on regarde un déplacement

comme nécessairement contrevariant, demande quelques éclaircissements. Il y a, bien entendu, un vecteur covariant $(dx)_\mu$ associé à $(dx)^\mu$; tous deux mesurent une certaine relation d'Univers qui unit deux points ou événements. Cette relation n'est pas géométrique par sa nature, mais nous la représentons géométriquement en introduisant la notion de situation et en faisant intervenir un système de coordonnées. Le passage de la réalité physique au schéma géométrique abstrait est tout entier contenu dans (11,0) où dx_1, dx'_1, etc., sont les mesures du vecteur physique et $\frac{\partial x'_1}{\partial x_1}$, etc., définissent la méthode géométrique utilisée dans la représentation de ce vecteur.

Dans la théorie vectorielle élémentaire, deux vecteurs sont dits *orthogonaux* quand leur produit scalaire est nul, et le carré de la *longueur* généralisée d'un vecteur est égal au produit scalaire du vecteur par lui-même. Dans la théorie générale on adopte les définitions correspondantes :

Les vecteurs A_μ et B_μ $\left(\text{ou } A_\mu \text{ et } B^\mu\right)$ sont orthogonaux si :

$$A_\mu B^\mu = 0. \qquad (18, 3)$$

Si l est la longueur de A_μ $\left(\text{ou de } A^\mu\right)$,

$$l^2 = A_\mu A^\mu. \qquad (18, 4)$$

Un vecteur est évidemment perpendiculaire sur lui-même quand sa longueur est nulle. Or l'intervalle entre deux « points » est la longueur du déplacement qui fait passer de l'un à l'autre, puisque :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,(dx)^\mu (dx)^\nu = (dx)_\nu (dx)^\nu,$$

d'après (18,2). Un déplacement est donc orthogonal avec lui-même, s'il se fait le long de la ligne d'Univers d'une perturbation lumineuse ($ds = 0$).

Si un vecteur A_μ subit un accroissement orthogonal infiniment petit dA_μ, sa longueur n'éprouve qu'une variation d'un ordre supérieur au premier. En effet :

$$\begin{aligned}(l+dl)^2 &= (A_\mu + dA_\mu)(A^\mu + dA^\mu) \quad \text{d'après (18, 4)}\\ &= A_\mu A^\mu + A^\mu dA_\mu + A_\mu dA^\mu\\ &= l^2 + 0 + 0,\end{aligned}$$

puisque A_μ et dA_μ sont orthogonaux.

Un tenseur d'ordre pair peut donner naissance à un invariant ; il suffit pour cela d'amener la moitié de ses indices à la position supérieure, l'autre moitié à la position inférieure et d'effectuer la contraction. Ainsi avec $A_{\mu\nu\sigma\tau}$ on forme $A_{\mu\nu}^{\sigma\tau}$, puis par contraction $A = A_{\mu\nu}^{\mu\nu}$; cet invariant est ce qu'on appelle l'*invariant contracté* du tenseur primitif (1). Un autre invariant que l'on peut faire dériver du tenseur $A_{\mu\nu\sigma\tau}$, c'est la longueur au carré $A_{\mu\nu\sigma\tau} \; A^{\mu\nu\sigma\tau}$. Il existe également des invariants dérivés tels que $A_{\mu\nu\alpha}^{\alpha} \, A_{\beta}^{\mu\nu\beta}$.

19. Symboles à trois indices de Christoffel.

Voici deux expressions qui reviendront sans cesse dans la suite de cet Ouvrage :

Le symbole à trois indices du premier genre de Christoffel :

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \qquad (19, 1)$$

Le symbole à trois indices du deuxième genre de Christoffel :

$$\{\mu\nu, \sigma\} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right). \qquad (19, 2)$$

De ces définitions nous déduisons immédiatement :

$$\{\mu\nu, \sigma\} = g^{\sigma\lambda}[\mu\nu, \lambda], \qquad (19, 3)$$

$$[\mu\nu, \sigma] = g_{\sigma\lambda}\{\mu\nu, \lambda\}. \qquad (19, 4)$$

(1) Les Allemands appellent A le « spur » du tenseur primitif. (*Note du Trad.*).

Le résultat (19,3) est évident. D'autre part :

$g_{\sigma\alpha}\{\mu\nu, \sigma\} = g_{\sigma\alpha}g^{\sigma\lambda}[\mu\nu, \lambda] = g^{\lambda}_{\alpha}[\mu\nu, \lambda] = [\mu\nu, \alpha]$, d'après (17,2)

ce qui prouve (19,4).

Nous voyons d'après (19,1) que :

$$[\mu\nu, \sigma] + [\sigma\nu, \mu] = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}. \qquad (19,5)$$

Il existe quarante symboles différents à trois indices de chaque genre, car les expressions sont symétriques en μ et ν. Signalons ici que les $g_{\mu\nu}$ sont les composantes du *potentiel* généralisé et les $\{\mu\nu, \sigma\}$ les composantes de la *force* généralisée dans la théorie d'Einstein (Voir § 41).

20. Equations d'une géodésique.

Cherchons maintenant les équations d'une géodésique, c'est-à-dire d'une courbe entre deux points quelconques de laquelle $\int ds$ soit stationnaire.

La géodésique est, en dynamique, une trajectoire absolue d'une importance capitale, mais pour le moment nous ne la considérons que pour l'aide précieuse qu'elle apporte au calcul tensoriel [1].

Considérons un arc quelconque de la géodésique ; fixons ses extrémités et donnons à chacun des points intermédiaires un déplacement infiniment petit dx_σ, ce qui a pour effet de déformer la courbe primitive.

Comme :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu\ ,$$

$$2ds\delta(ds) = dx_\mu dx_\nu \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}dx_\mu \delta(dx_\nu) + g_{\mu\nu}dx_\nu \delta(dx_\mu)$$

$$= dx_\mu dx_\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma + g_{\mu\nu}dx_\mu d(\delta x_\nu) + g_{\mu\nu}dx_\nu d(\delta x_\mu). \qquad (20,1)$$

[1] L'équation que nous voulons établir est l'équation (21,1). Ceux pour qui le calcul des variations n'est pas familier, peuvent prendre la deuxième démonstration exposée au § 22. Ceux, au contraire, que la présente démonstration satisfait, peuvent passer le § 22.

La condition de l'intégrale stationnaire s'écrit :

$$\int \delta(ds) = 0\,;$$

ce qui, d'après (20,1), devient :

$$\int \frac{1}{2}\left[\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma + g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x_\nu) + g_{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x_\mu)\right] ds = 0,$$

ou, en changeant les indices muets dans les deux derniers termes :

$$\int \frac{1}{2}\left[\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma + \left(g_{\mu\sigma}\frac{dx_\mu}{ds} + g_{\sigma\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\right)\frac{d}{ds}(\delta x_\sigma)\right] ds = 0.$$

En intégrant par parties et en remarquant que δx_σ s'annule aux limites d'intégration, il vient :

$$\int \frac{1}{2}\left[\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\sigma}\frac{dx_\mu}{ds} + g_{\sigma\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\right)\right]\delta x_\sigma ds = 0$$

Cette relation devant être vérifiée en tout point de la courbe et quel que soit le déplacement arbitraire δx_σ, le coefficient différentiel de l'intégrale doit donc s'annuler en chaque point. Par suite :

$$\frac{1}{2}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\mu\sigma}}{ds}\frac{dx_\mu}{ds} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\nu\sigma}}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} - \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}\frac{d^2x_\mu}{ds^2} - \frac{1}{2}g_{\nu\sigma}\frac{d^2x_\nu}{ds^2} = 0.$$

Mais

$$\frac{dg_{\mu\sigma}}{ds} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\quad,\qquad \frac{dg_{\nu\sigma}}{ds} = \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}.$$

Dans les deux derniers termes de l'équation on peut remplacer les indices muets μ et ν par ε. D'où :

$$-\frac{1}{2}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)-g_{\varepsilon\sigma}\frac{d^2x_\varepsilon}{ds^2}=0. \quad (20,2)$$

Pour nous débarrasser du facteur $g_{\varepsilon\sigma}$, multiplions les deux membres de cette équation par $g^{\sigma\alpha}$. Il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{dx_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)+\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}=0, \quad (20,3)$$

ou, en tenant compte de (19,2) :

$$\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}+\{\mu\nu,\alpha\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0. \quad (20,4)$$

En faisant successivement $\alpha = 1, 2, 3, 4$, on obtient les quatre équations de la géodésique.

21. Dérivée covariante d'un vecteur.

La dérivée d'un invariant est un vecteur covariant (11,15), mais la dérivée d'un vecteur n'est pas un tenseur. Nous nous proposons dans ce paragraphe de trouver une expression possédant les caractères d'un tenseur et qui puisse, dans notre méthode de calcul, remplacer la dérivée ordinaire.

Comme dx_μ est contrevariant et que ds est invariant, une « vitesse » $\frac{dx_\mu}{ds}$ est un vecteur contrevariant. Donc, quel que soit le vecteur covariant A_μ, le produit intérieur $A_\mu \frac{dx_\mu}{ds}$ est invariant.

Le taux de variation de cet invariant par intervalle-unité pris le long d'une courbe quelconque doit être également un invariant :

$$\frac{d}{ds}\left(A_\mu \frac{dx_\mu}{ds}\right) \text{ est invariant.} \quad (21, 0)$$

Ceci, bien entendu, suppose que nous conservons toujours la même courbe absolue quel que soit le changement de système

de coordonnées. La propriété (21,0) n'a de sens que si nous pouvons définir la courbe à laquelle elle se rapporte, indépendamment des coordonnées choisies. Il est donc tout indiqué d'appliquer cette propriété à une géodésique puisque cette courbe peut recevoir une définition absolue. En effectuant la différentiation, on voit que :

$A_\mu \frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds}$ est invariant le long d'une géodésique.

D'après (20,4) :

$$A_\mu \frac{d^2x_\mu}{ds^2} = A_\alpha \frac{d^2x_\alpha}{ds^2} = -\left\{ \mu\nu, \alpha \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} A_\alpha \ .$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \mu\nu, \alpha \right\} A_\alpha \right) \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \text{ est un invariant.}$$

Comme $\frac{dx_\mu}{ds}$, $\frac{dx_\nu}{ds}$ sont des vecteurs contrevariants, la quantité entre parenthèses doit, d'après le § 16, être un tenseur covariant du second ordre. Nous écrirons donc :

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \mu\nu, \alpha \right\} A_\alpha \ . \qquad (21, 1)$$

$A_{\mu\nu}$ est ce que l'on appelle la *dérivée covariante* de A_μ.

En introduisant le vecteur contrevariant associé A^μ nous avons :

$$A_\sigma = g_{\sigma\varepsilon} A^\varepsilon \ .$$

D'après (21,1) :

$$A_{\sigma\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(g_{\sigma\varepsilon} A^\varepsilon \right) - \left\{ \sigma\nu, \alpha \right\} \left(g_{\alpha\varepsilon} A^\varepsilon \right)$$

$$= g_{\sigma\varepsilon} \frac{\partial A^\varepsilon}{\partial x_\nu} + A^\varepsilon \left(\frac{\partial g_{\sigma\varepsilon}}{\partial x_\nu} - [\sigma\nu, \varepsilon] \right) \qquad \text{d'après } (19, 4)$$

$$= g_{\sigma\varepsilon} \frac{\partial A^{\varepsilon}}{\partial x_{\nu}} + A^{\varepsilon} [\varepsilon\nu, \sigma] \qquad \text{d'après } (19, 5).$$

Multiplions les deux membres par $g^{\sigma\mu}$ pour faire passer en haut l'indice σ ; nous obtenons :

$$A^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \{\varepsilon\nu, \mu\} A^{\varepsilon} . \qquad (21, 2)$$

C'est ce que l'on appelle la *dérivée covariante* de A^{μ}.

Ces définitions permettent de faire passer l'indice de bas en haut indifféremment avant ou après la différentiation covariante. A remarquer la grande différence qu'il y a entre les formules (21,1) et (21,2) ; à noter également que la différentiation ajoute toujours un indice covariant.

22. Autre méthode pour trouver l'expression de la dérivée covariante.

D'après (15,22),

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} g_{\alpha\beta} .$$

D'où en différentiant :

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'_{\lambda}} = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 x_{\alpha}}{\partial x'_{\lambda} \partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} + \frac{\partial^2 x_{\alpha}}{\partial x'_{\lambda} \partial x'_{\nu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\mu}} \right) + \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\lambda}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}}, \qquad (22, 11)$$

puisque $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x'_{\lambda}} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\lambda}}$ et que dans le deuxième terme de la parenthèse on peut permuter les indices muets α et β (14, 2).

De même :

$$\frac{\partial g'_{\nu\lambda}}{\partial x'_{\mu}} = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu} \partial x'_{\nu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\lambda}} + \frac{\partial^2 x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu} \partial x'_{\lambda}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} \right) + \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\lambda}} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}} ; \qquad (22, 12)$$

$$\frac{\partial g'_{\lambda\mu}}{\partial x'_\nu} = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\nu \partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} + \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\nu \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda}\right) + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} \quad (22,13)$$

Ajoutons membre à membre (22,12) et (22,13), et retranchons (22,11) du résultat ; d'après (19,1) il vient :

$$[\mu\nu, \lambda]' = g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}[\alpha\beta, \gamma]. \quad (22,2)$$

Multiplions les deux membres par $g'^{\lambda\rho}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}$; d'après (19,3).

$$\{\mu\nu, \rho\}'\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu}\cdot g'^{\lambda\rho}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} + g'^{\lambda\rho}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}\cdot\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}[\alpha\beta, \gamma]$$

$$= g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu}\cdot g^{\beta\varepsilon} + g^{\gamma\varepsilon}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}[\alpha\beta, \gamma] \quad \text{d'après } (15,21)$$

$$= \frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} + \{\alpha\beta, \varepsilon\}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \quad (22,3)$$

d'après (17,2) et (19,3).

Maintenant, d'après (15,12) :

$$A'_\mu = \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\mu}A_\varepsilon .$$

D'où, en différentiant,

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu}A_\varepsilon + \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_\delta}$$

$$= \{\mu\nu, \rho\}'A_\varepsilon\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} - \{\alpha\beta, \varepsilon\}A_\varepsilon\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}$$

d'après (22,3), et en changeant les indices muets dans le dernier terme.

Comme $A'_\rho = \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} A_\varepsilon$, on en déduit :

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu} - \{\mu\nu, \rho\}' A'_\rho = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \{\alpha\beta, \varepsilon\} A_\varepsilon \right),$$

ce qui montre que :

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu, \rho\} A_\rho$$

est un tenseur obéissant à la loi de transformation (15,22).

Nous aboutissons ainsi à l'équation (21,1) par une autre méthode sans faire appel au calcul des variations, et nous pouvons poursuivre notre discussion comme au § 21.

23. Dérivée covariante d'un tenseur.

En partant des tenseurs du deuxième ordre, nous pouvons obtenir par différentiation covariante des tenseurs du troisième ordre d'après les lois suivantes :

$$A^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \{\alpha\sigma, \mu\} A^{\alpha\nu} + \{\alpha\sigma, \nu\} A^{\mu\alpha} ; \qquad (23,1)$$

$$A^\nu_{\mu\sigma} = \frac{\partial A^\nu_\mu}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma, \alpha\} A^\nu_\alpha + \{\alpha\sigma, \nu\} A^\alpha_\mu ; \qquad (23,2)$$

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma, \alpha\} A_{\alpha\nu} - \{\nu\sigma, \alpha\} A_{\mu\alpha} . \qquad (23,3)$$

On saisira sur l'exemple suivant la règle de différentiation d'un tenseur d'ordre quelconque :

$$A^\rho_{\lambda\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} A^\rho_{\lambda\mu\nu} - \{\lambda\sigma, \alpha\} A^\rho_{\alpha\mu\nu} - \{\mu\sigma, \alpha\} A^\rho_{\lambda\alpha\nu} - \{\nu\sigma, \alpha\} A^\rho_{\lambda\mu\alpha}$$
$$+ \{\alpha\sigma, \rho\} A^\alpha_{\lambda\mu\nu} .$$

La preuve que ces expressions sont des tenseurs s'obtient par une généralisation immédiate des méthodes utilisées pour

A_μ et A^μ [1]. Par exemple, pour avoir l'expression de la dérivée covariante du tenseur $A_{\mu\nu}$, on part non pas de (21,0) mais de l'invariance de :

$$\frac{d}{ds}\left(A_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right),$$

et l'on poursuit la démonstration comme au § 21.

Si $A_{\mu\nu}$ est le produit de deux vecteurs :

$$A_{\mu\nu} = B_\mu C_\nu\,,$$

nous avons :

$$B_{\mu\sigma}C_\nu + B_\mu C_{\nu\sigma} = \left(\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma, \alpha\}\, B_\alpha\right) C_\nu + \left(\frac{\partial C_\nu}{\partial x_\sigma} - \{\nu\sigma, \alpha\}\, C_\alpha\right) B_\mu$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(B_\mu C_\nu\right) - \{\mu\sigma, \alpha\}\left(B_\alpha C_\nu\right) - \{\nu\sigma, \alpha\}\left(B_\mu C_\alpha\right)$$

$$= \left(B_\mu C_\nu\right)_\sigma = A_{\mu\nu\sigma}, \qquad \text{d'après (23,3).}$$

Le membre de gauche étant un tenseur, nous avons la preuve que dans ce cas (23,3) est un tenseur ; il est possible de partir de là pour faire une démonstration générale. Le résultat :

$$\left(B_\mu C_\nu\right)_\sigma = B_{\mu\sigma}C_\nu + B_\mu C_{\nu\sigma} \qquad (23,4)$$

montre que la différentiation covariante est une opération distributive comme la différentiation ordinaire.

D'après (23,3) nous avons dans le cas du tenseur fondamental :

$$g_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma, \alpha\}\, g_{\alpha\nu} - \{\nu\sigma, \alpha\}\, g_{\mu\alpha}$$

$$= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - [\mu\sigma, \nu] - [\nu\sigma, \mu]$$

$$= 0, \qquad \text{d'après (19,5).}$$

[1] Voir § 26 *bis*.

Les dérivées covariantes des tenseurs fondamentaux sont nulles de sorte que dans la différentiation covariante les $g_{\mu\nu}$ se comportent comme des constantes.

En conséquence :

$$A^{\nu}_{\sigma} = \left(g^{\nu\alpha} A_{\alpha}\right)_{\sigma} = g^{\nu\alpha} A_{\alpha\sigma} = A^{\nu}_{\sigma} \;;$$

les deux interprétations possibles de A^{ν}_{σ} sont donc compatibles.

La dérivée covariante A_{σ} d'un scalaire (invariant) est la même que sa dérivée ordinaire $\frac{\partial A}{\partial x_{\sigma}}$. Par exemple, nous vérifions d'après (21,1) et (21,2) que :

$$\left(A_{\mu} A^{\mu}\right)_{\sigma} = A_{\mu} A^{\mu}_{\sigma} + A_{\mu\sigma} A^{\mu} = \frac{\partial\left(A_{\mu} A^{\mu}\right)}{\partial x_{\sigma}}. \qquad (23,5)$$

L'utilité de la dérivée covariante tient en grande partie à ce fait que, si les $g_{\mu\nu}$ sont constants, tous les symboles à trois indices sont nuls et l'expression se réduit à la dérivée ordinaire. En général, nos équations physiques ont été établies en coordonnées galiléennes où les $g_{\mu\nu}$ sont des constantes ; nous pouvons par suite, dans ces équations galiléennes, remplacer les dérivées ordinaires par les dérivées covariantes sans que ces équations cessent d'être valables.

Supposons par exemple que nous voulions obtenir l'équation générale de la propagation d'un potentiel avec une vitesse égale à l'unité. En coordonnées galiléennes, cette équation est :

$$\Box\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (23,6)$$

Les valeurs galiléennes des $g_{\mu\nu}$ sont : $g^{44} = 1$; $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$, et les autres coefficients sont nuls. (23,6) peut donc s'écrire :

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} = 0. \qquad (23,65)$$

Le potentiel étant un scalaire, sa dérivée ordinaire est un vecteur covariant φ_{μ} ; en coordonnées galiléennes, nous pou-

vons remplacer la dérivée ordinaire $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}$ par la dérivée covariante $\varphi_{\mu\nu}$. D'où l'équation :

$$g^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} = 0. \tag{23,7}$$

Jusqu'ici, les coordonnées galiléennes sont essentielles ; mais nous remarquons maintenant que le premier membre de (23,7) est un invariant pour tous les changements de coordonnées. Comme il est nul dans un système, il l'est également dans tout autre et (23,7) est applicable quel que soit de système de coordonnées choisi. D'après (21,1) nous pouvons mettre cette équation générale sous la forme :

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right) = 0. \tag{23,8}$$

Cette formule peut servir à transformer l'équation de Laplace en coordonnées curvilignes, etc...

Il ne faut pas oublier qu'une transformation de coordonnées n'altère pas le *genre d'espace*. Si, par exemple, l'expérience nous a appris que φ se propage suivant la loi (23,6) en coordonnées galiléennes, il s'ensuit rigoureusement que ce potentiel se propage suivant la loi (23,8) dans n'importe quel système de coordonnées tracé dans l'espace-temps euclidien. Il *ne* s'ensuit *pas*, au contraire, que (23,8) soit valable là où il existe un champ de gravitation et où l'espace-temps n'est plus euclidien. Néanmoins il n'est pas déraisonnable de penser que (23,8) pourrait bien être la loi générale de la propagation de φ dans n'importe quel genre d'espace-temps, en particulier si la perturbation qui se propage est d'un caractère simple et n'est pas de nature à se laisser influencer par les composantes de la courbure (Cf. Note 11, p. 256).

24. Interprétation de la dérivée covariante.

Supposons que nous nous donnions un champ de force et que nous voulions savoir comment la force varie d'un point à un autre de ce champ. Si nous nous servons de coordonnées

polaires, nous voyons immédiatement qu'une variation de la composante suivant le rayon vecteur n'indique pas nécessairement un changement réel de la force ou un défaut d'uniformité dans le champ. Cette variation est due, en partie du moins, au fait que les rayons vecteurs aux deux points considérés sont inclinés l'un sur l'autre. La dérivée ordinaire d'un vecteur $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ ne peut donc être regardée comme une mesure de la variation absolue de ce vecteur. S'il existe quelque chose que l'on puisse vraiment regarder comme un taux absolu de variation, ce doit être un tenseur. Nous avons vu qu'il existe un tenseur, la dérivée covariante $A_{\mu\nu}$, formée du terme $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ donnant le gradient apparent duquel on retranche la « pseudo-variation » $\{\mu\nu, \alpha\} A_\alpha$ attribuable à la nature curviligne des coordonnées. Plaçons-nous en coordonnées cartésiennes ; comme nous pouvions nous y attendre, la pseudo-variation disparaît puisque les symboles à trois indices sont tous nuls. $A_{\mu\nu}$ représente donc le taux de variation absolue du vecteur A_μ suivant la direction x_ν.

Considérons un parallélogramme élémentaire dans le plan $x_\nu x_\sigma$, ses sommets étant respectivement $A(x_\nu, x_\sigma)$, $B(x_\nu + dx_\nu, x_\sigma)$, $C(x_\nu + dx_\nu, x_\sigma + dx_\sigma)$, $D(x_\nu, x_\sigma + dx_\sigma)$. Etudions la variation absolue du vecteur A_μ quand on décrit le contour ABCDA.

(1) De A à B, la variation absolue est $A_{\mu\nu} dx_\nu$ prise pour la valeur x_σ.

(2) De B à C, la variation absolue est $A_{\mu\sigma} dx_\sigma$ prise pour la valeur $x_\nu + dx_\nu$.

(3) De C à D, la variation absolue est $- A_{\mu\nu} dx_\nu$ prise pour la valeur $x_\sigma + dx_\sigma$.

(4) De D à A, la variation absolue est $- A_{\mu\sigma} dx_\sigma$ prise pour la valeur x_ν.

En combinant (2) et (4), nous avons la différence des valeurs de $A_{\mu\sigma} dx_\sigma$ pour $x_\nu + dx_\nu$ et pour x_ν. Cette différence est :

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(A_{\mu\sigma}\right) dx_\nu dx_\sigma. \text{ (}^1\text{)}$$

(1) et (3) donnent de même $-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(A_{\mu\nu}\right) dx_\nu dx_\sigma$. La variation totale le long du contour ABCDA est donc :

$$\left[\frac{\partial A_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right] dx_\nu dx_\sigma,$$

ce qui d'après (23,3) est égal à [2] :

$$\left(A_{\mu\sigma\nu} - A_{\mu\nu\sigma}\right) dx_\nu dx_\sigma.$$

Dans nos connaissances ordinaires, la variation totale d'un vecteur le long d'un circuit fermé est nulle, de sorte que nous aurons $A_{\mu\sigma\nu} = A_{\mu\nu\sigma}$. Nous verrons dans le prochain paragraphe que tel n'est pas le cas général. L'ordre de la différentiation covariante n'est pas permutable. Si, prenant un vecteur, nous lui faisons décrire un contour fermé, le long duquel il soit constamment sans « variation absolue » nous obtenons à la fin du trajet un vecteur différent de celui que nous avions au départ (Cf. p. 215).

Telle que nous l'entendons, l'expression « variation absolue » fait bien penser à l'idée générale qu'implique la différentiation covariante, mais elle est loin d'être satisfaisante. Levi-Civita et Weyl emploient l'expression de *déplacement parallèle* à la place de ce que nous avons appelé un déplacement sans variation absolue, c'est-à-dire un déplacement tel que la dérivée covariante soit constamment nulle le long de la trajectoire décrite.

On peut, par la méthode employée dans le théorème de

(1) Ne pas appliquer la convention de sommation puisque $dx_\nu dx_\sigma$ est un parallélogramme élémentaire particulier et bien déterminé.

(2) Cette propriété importante que le « rotationnel covariant » est le même que le « rotationnel » ordinaire n'est vraie que pour les tenseurs *covariants*.

Stokes, étendre cette formule à un circuit fini (1). Ainsi, la variation du vecteur A_μ prise par déplacement parallèle le long d'un contour fermé est :

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} \int\int (A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu}) d\mathbf{S}^{\nu\sigma}, \qquad (24,1)$$

où l'intégrale est étendue à une surface quelconque limitée par le contour. Ici $d\mathbf{S}^{\sigma\nu} = -d\mathbf{S}^{\nu\sigma} = dx_\sigma dx_\nu$; autrement dit, c'est un tenseur symétrique gauche qui fait correspondre à l'aire élémentaire une direction positive de parcours sur le contour qui la limite. C'est une convention évidemment nécessaire pour pouvoir effectuer la sommation.

25. Le tenseur de Riemann-Christoffel.

La dérivée covariante seconde de A_μ s'obtient en remplaçant dans (23,3) $A_{\mu\nu}$ par sa valeur tirée de (21,1) ; ce qui donne :

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\} A_\alpha\right) - \{\mu\sigma, \alpha\}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu} - \{\alpha\nu, \varepsilon\} A_\varepsilon\right)$$
$$- \{\nu\sigma, \alpha\}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} - \{\mu\alpha, \varepsilon\} A_\varepsilon\right)$$
$$= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma} - \{\mu\sigma, \alpha\}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu} - \{\nu\sigma, \alpha\}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}$$
$$+ \{\nu\sigma, \alpha\}\{\mu\alpha, \varepsilon\} A_\varepsilon + \{\sigma\mu, \alpha\}\{\alpha\nu, \varepsilon\} A_\varepsilon - A_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu, \alpha\}. \qquad (25,1)$$

Les cinq premiers termes ne sont pas modifiés si l'on permute ν et σ. De là :

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu}$$
$$= \left[\{\mu\sigma, \alpha\}\{\alpha\nu, \varepsilon\} - \{\mu\nu, \alpha\}\{\alpha\sigma, \varepsilon\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu, \varepsilon\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma, \varepsilon\}\right] A_\varepsilon,$$

(1) Quand on fait la somme pour un certain nombre de circuits adjacents, les arcs communs sont décrits chacun deux fois dans des sens opposés de sorte que les éléments de l'intégrale qui leur correspondent se détruisent mutuellement ; le résultat est le même que si l'on avait simplement décrit le contour extérieur limitant l'ensemble des circuits élémentaires.

ce que l'on écrit :

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} A_{\varepsilon} \quad (25,2)$$

Le coefficient de A_{ε} est un tenseur d'après la loi rigoureuse du quotient et nous avons :

$$B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = \{\mu\sigma,\alpha\}\{\alpha\nu,\varepsilon\} - \{\mu\nu,\alpha\}\{\alpha\sigma,\varepsilon\} + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\{\mu\sigma,\varepsilon\} - \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\{\mu\nu,\varepsilon\}. \quad (25,3)$$

C'est ce que l'on appelle le tenseur de Riemann-Christoffel.

On peut faire passer en bas l'indice ε :

$$B_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\rho\varepsilon} B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = \{\mu\sigma,\alpha\}[\alpha\nu,\rho] - \{\mu\nu,\alpha\}[\alpha\sigma,\rho] + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}[\mu\sigma,\rho]$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}[\mu\nu,\rho] - \{\mu\sigma,\alpha\}\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \{\mu\nu,\alpha\}\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x_{\sigma}}$$

$$= - \{\mu\sigma,\alpha\}[\rho\nu,\alpha] + \{\mu\nu,\alpha\}[\rho\sigma,\alpha] + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}[\mu\sigma,\rho] - \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}[\mu\nu,\rho], \quad (25,4)$$

d'après (19,5).

Si l'on développe les deux premiers termes de la dernière expression, on voit que le tenseur est symétrique gauche en μ et ρ ainsi qu'en ν et σ.

Nous devons signaler que le tenseur de Riemann-Christoffel appartient à la classe des tenseurs fondamentaux, c'est-à-dire qu'il n'est constitué que par les $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées. Ordinairement, en partant d'un tenseur quelconque, on peut former une série de tenseurs d'ordres de plus en plus élevés par le procédé de la différentiation covariante. Mais si nous partons du tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu\sigma} = 0$ et la méthode précédente est inapplicable. Nous avons contourné cette lacune et nous sommes arrivés par un chemin différent à un tenseur fondamental du quatrième ordre. Nous pouvons maintenant prendre ce tenseur pour point de départ et obtenir par différentiation covariante une série de tenseurs d'ordres de plus en plus élevés.

26. Autres formules.

Les formules suivantes sont d'un usage très fréquent.
Comme :

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq \alpha \\ 1 & \text{si } \nu = \alpha \end{cases}$$

$$g^{\mu\alpha} dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} dg^{\mu\alpha} = 0.$$

D'où :

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} dg_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu} g^{\nu\beta} dg^{\mu\alpha} = - g^{\beta}_{\mu} dg^{\mu\alpha}$$
$$= - dg^{\alpha\beta}. \qquad (26,1)$$

De même :

$$dg_{\alpha\beta} = - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} dg^{\mu\nu}. \qquad (26,12)$$

En multipliant les deux membres de (26,12) par $A^{\alpha\beta}$, nous avons :

$$A^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} = - A_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} = - A_{\alpha\beta} dg^{\alpha\beta}. \qquad (26,2)$$

dg se forme en prenant la différentielle de chacun des $g_{\mu\nu}$, en la multipliant par le mineur correspondant à $g_{\mu\nu}$ dans le déterminant g et en faisant la somme algébrique de tous ces produits. Donc :

$$dg = g . g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}.$$

D'où :

$$d\,(\log g) = g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}. \qquad (26,3)$$

Le symbole à trois indices contracté :

$$\{\mu\sigma, \sigma\} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_{\lambda}} \right)$$
$$= \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x_{\mu}},$$

car en permutant les indices muets σ et λ, on voit que les autres termes se détruisent deux à deux dans la sommation.

D'après (26,3) :

$$\{\mu\sigma, \sigma\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\log g) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\log \sqrt{-g}). \quad (26,4)$$

Nous prenons $\sqrt{-g}$ et non $\sqrt{g}$, car g est toujours négatif dans le cas des coordonnées réelles.

26 *bis*. Problème général de la différentiation tensorielle (1).

Etant donné dans un espace quelconque à n dimensions un tenseur covariant d'ordre m et contrevariant d'ordre p, $A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_m}$, est-il possible d'en déduire un tenseur covariant d'ordre $(m+1)$ et contrevariant d'ordre p, $A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_m r_{m+1}}$, dont les composantes en coordonnées galiléennes se réduisent aux dérivées des composantes du premier tenseur par rapport à ces coordonnées ?

Par définition, si nous faisons un changement de coordonnées quelconque :

$$x'_i = \varphi_i (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

qui, si l'inversion est possible, donne :

$$x_j = f_j (x'_1\, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

le tenseur $A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_m}$ qui dépend des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se transforme en un tenseur $A'^{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1 \rho_2 - \rho_m}$ tel que :

$$A'^{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1 \rho_2 - \rho_m} = A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_m} \frac{\partial x_{r_1}}{\partial x'_{\rho_1}} \frac{\partial x_{r_2}}{\partial x'_{\rho_2}} \cdots \frac{\partial x_{r_m}}{\partial x'_{\rho_m}} \frac{\partial x'_{\sigma_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial x'_{\sigma_2}}{\partial x_{s_2}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_p}}{\partial x_{s_p}},$$

ce qui peut s'écrire :

$$A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_m} \frac{\partial x'_{\sigma_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial x'_{\sigma_2}}{\partial x_{s_2}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_p}}{\partial x_{s_p}}$$

(1) Paragraphe ajouté par le Traducteur avec l'autorisation de l'Auteur.

$$= A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_m} \frac{\partial x'_{\rho_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial x'_{\rho_2}}{\partial x_{r_2}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho m}}{\partial x_{r_m}} . \quad (26^{b}1)$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rappor à $x_{r_{m+1}}$:

$$\frac{\partial A^{s_1s_2 - s_p}_{r_1r_2 - r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} \frac{\partial x'_{\sigma_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial x'_{\sigma_2}}{\partial x_{s_2}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_p}}{\partial x_{s_p}}$$

$$+ A^{s_1s_2 - s_i - s_p}_{r_1r_2 - r_m} \left[\frac{\partial x'_{\sigma_1}}{\partial x_{s_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_{i-1}}}{\partial x_{s_{i-1}}} \frac{\partial^2 x'_{\sigma_i}}{\partial x_{s_i} \partial x_{r_{m+1}}} \frac{\partial x'_{\sigma_{i+1}}}{\partial x_{s_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_p}}{\partial x_{s_p}} \right]$$

$$= \frac{\partial A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_m}}{\partial x'_{\tau}} \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{r_{m+1}}} \frac{\partial x'_{\rho_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial x'_{\rho_2}}{\partial x_{r_2}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho m}}{\partial x_{r_m}}$$

$$+ A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_i - \rho_m} \left[\frac{\partial x'_{\rho_1}}{\partial x_{r_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho_{i-1}}}{\partial x_{r_{i-}}} \frac{\partial^2 x'_{\rho_i}}{\partial x_{r_i} \partial x_{r_{m+1}}} \frac{\partial x'_{\rho_{i+1}}}{\partial x_{r_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho m}}{\partial x_{r_m}} \right] \quad (26^{b}2)$$

Nous allons dans cette relation remplacer les dérivées secondes par leurs valeurs tirées de la formule (22,3) qui donne ici :

$$\frac{\partial^2 x'_{\sigma_i}}{\partial x_{s_i} \partial x_{r_{m+1}}} = \{s_i r_{m+1}, q\} \frac{\partial x'_{\sigma_i}}{\partial x_q} - \{\alpha\beta, \sigma_i\}' \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{s_i}} \frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x_{r_{m+1}}},$$

$$\frac{\partial^2 x'_{\rho_i}}{\partial x_{r_i} \partial x_{r_{m+1}}} = \{r_i r_{m+1}, q\} \frac{\partial x'_{\rho_i}}{\partial x_q} - \{\alpha\beta, \rho_i\}' \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{r_i}} \frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x_{r_{m+1}}}.$$

En portant dans (26 b. 2), il vient :

$$\frac{\partial A^{s_1s_2 - s_p}_{r_1r_2 - r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} \frac{\partial x'_{\sigma_1}}{\partial x_{s_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_p}}{\partial x_{s_p}}$$

$$+ A^{s_1s_2 - s_i - s_p}_{r_1r_2 - r_m} \{s_i r_{m+1}, q\} \frac{\partial x'_{\sigma_1}}{\partial x_{s_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_{i-1}}}{\partial x_{s_{i-1}}} \frac{\partial x'_{\sigma_i}}{\partial x_q} \frac{\partial x'_{\sigma_{i+1}}}{\partial x_{s_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_p}}{\partial x_{s_p}}$$

$$- A^{s_1s_2 - s_i - s_p}_{r_1r_2 - r_m} \{\alpha\beta, \sigma_i\}' \frac{\partial x'_{\sigma_1}}{\partial x_{s_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_{i-1}}}{\partial x_{s_{i-1}}} \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{s_i}} \frac{\partial x'_{\sigma_{i+1}}}{\partial x_{s_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_p}}{\partial x_{s_p}} \frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x_{r_{m+1}}}$$

$$= \frac{\partial A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_m}}{\partial x'_{\tau}} \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{r_{m+1}}} \frac{\partial x'_{\rho_1}}{\partial x_{r_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho m}}{\partial x_{r_m}}$$

$$+ A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_i - \rho_m} \{r_i r_{m+1}, q\} \frac{\partial x'_{\rho_1}}{\partial x_{r_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho_{i-1}}}{\partial x_{r_{i-1}}} \frac{\partial x'_{\rho_i}}{\partial x_q} \frac{\partial x'_{\rho_{i+1}}}{\partial x_{r_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho_m}}{\partial x_{r_m}}$$

$$- A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_i - \rho_m} \{\alpha\beta, \rho_i\}' \frac{\partial x'_{\rho_1}}{\partial x_{r_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho_{i-1}}}{\partial x_{r_{i-1}}} \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{r_i}} \frac{\partial x'_{\rho_{i+1}}}{\partial x_{r_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho_m}}{\partial x_{r_m}} \frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x_{r_{m+1}}} \qquad (26^b3)$$

égalité que nous allons transformer en tenant compte du fait que (26 *b*. 1) peut s'écrire :

$$A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_i - \rho_m} \frac{\partial x'_{\rho_1}}{\partial x_{r_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho_{i-1}}}{\partial x_{r_{i-1}}} \frac{\partial x'_{\rho_i}}{\partial x_q} \frac{\partial x'_{\rho_{i+1}}}{\partial x_{r_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho_m}}{\partial x_{r_m}}$$

$$= A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_{i-1} q r_{i+1} - r_m} \frac{\partial x'_{\sigma_1}}{\partial x_{s_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_p}}{\partial x_{s_p}}$$

ou encore :

$$A^{s_1 s_2 - s_i - s_p}_{r_1 r_2 - r_m} \frac{\partial x'_{\sigma_1}}{\partial x_{s_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_{i-1}}}{\partial x_{s_{i-1}}} \frac{\partial x'_{\lambda}}{\partial x_{s_i}} \frac{\partial x'_{\sigma_{i+1}}}{\partial x_{s_{i+1}}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_p}}{\partial x_{s_p}}$$

$$= A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_{i-1}\lambda\sigma_{i+1} - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_m} \frac{\partial x'_{\rho_1}}{\partial x_{r_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho_m}}{\partial x_{r_m}}.$$

L'égalité (26 *b*. 3) s'écrit alors en remplaçant τ par ρ_{m+1}, α par λ et β par ρ_{m+1}, puis en interchangeant λ et ρ_i :

$$\left[\frac{\partial A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} + A^{s_1 - s_{i-1} q s_{i+1} - s_p}_{r_1 r_2 - r_m} \{q r_{m+1}, s_i\} \right.$$

$$\left. - A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_{i-1} q r_{i+1} - r_m} \{r_i r_{m+1}, q\}\right] \frac{\partial x'_{\sigma_1}}{\partial x_{s_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\sigma_p}}{\partial x_{s_p}}$$

$$= \left[\frac{\partial A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_m}}{\partial x'_{\rho_{m+1}}} + A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_{i-1}\lambda\sigma_{i+1} - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_m} \{\lambda\rho_{m+1}, \sigma_i\}' \right.$$

$$\left. - A'^{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}_{\rho_1\rho_2 - \rho_{i-1}\lambda\rho_{i+1} - \rho_m} \{\rho_i\rho_{m+1}, \lambda\}'\right] \frac{\partial x'_{\rho_1}}{\partial x_{r_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\rho_m}}{\partial x_{r_m}} \frac{\partial x'_{\rho_{m+1}}}{\partial x_{r_{m+1}}},$$

ce qui montre que nous pouvons poser :

$$A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_m r_{m+1}} = \frac{\partial A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} + \{r_{m+1} q, s_i\} A^{s_1 s_2 - s_{i-1} q s_{i+1} - s_p}_{r_1 r_2 - r_m}$$

$$- \{r_{m+1} r_i, q\} A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_{i-1} q r_{i+1} - r_m} \qquad (26^b4)$$

et ce nouveau tenseur répond bien aux conditions du problème puisque, en coordonnées galiléennes, les symboles à trois indices sont tous nuls. C'est ce tenseur qui a reçu le nom de ***dérivée covariante*** du tenseur $A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_m}$.

Cette formule (26 *b*. 4) est applicable si le tenseur primitif n'est pas mixte ; autrement dit, on a :

$$A_{r_1 r_2 - r_m r_{m+1}} = \frac{\partial A_{r_1 r_2 - r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \{r_{m+1} r_i, q\} A_{r_1 r_2 - r_{i-1} q r_{i+1} - r_m};$$

$$A^{s_1 s_2 - s_p}_{t} = \frac{\partial A^{s_1 s_2 - s_p}}{\partial x_t} + \{tq, s_i\} A^{s_1 s_2 - s_{i-1} q s_{i+1} - s_p}.$$

Les formules (21,1), (21,2), (23,1), (23,2), (23,3) ne sont que des cas particuliers de ces relations.

Dans la formule (26 *b*. 4) remplaçons maintenant chacun des tenseurs par son expression en fonction du tenseur réciproque par rapport à la forme fondamentale $g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$. Nous obtiendrons une relation entre un tenseur covariant d'ordre p et contrevariant d'ordre $(m+1)$ et des tenseurs covariants d'ordre p et contrevariants d'ordre m. On peut se demander s'il existe une relation entre ce tenseur d'ordre total $(p+m+1)$ et le tenseur covariant d'ordre p et contrevariant d'ordre $(m+1)$ « associé » à la dérivée covariante du tenseur d'ordre $(p+m)$.

D'après le § 18 on a :

$$A^{s_1 s_2 - s_p}_{r_1 r_2 - r_m r_{m+1}} = g_{r_1 \rho_1} \cdots g_{r_m \rho_m} g_{r_{m+1} \rho_{m+1}} g^{s_1 \sigma_1} \cdots g^{s_p \sigma_p} A^{\rho_1 \rho_2 - \rho_m \rho_{m+1}}_{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_p}.$$

En portant dans (26 *b*. 4) il vient donc :

$$g_{r_1 \rho_1} \cdots g_{r_m \rho_m} g_{r_{m+1} \rho_{m+1}} g^{s_1 \sigma_1} \cdots g^{s_p \sigma_p} A^{\rho_1 \rho_2 - \rho_m \rho_{m+1}}_{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_p}$$

$$= \frac{\partial A^{\rho_1 \rho_2 - \rho_m}_{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_p}}{\partial x_{r_{m+1}}} g_{r_1 \rho_1} \cdots g_{r_m \rho_m} g^{s_1 \sigma_1} \cdots g^{s_p \sigma_p}$$

$$+ \{r_{m+1} q, s_i\} A^{\rho_1 \rho_2 - \rho_m}_{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_{i-1} \lambda \sigma_{i+1} - \sigma_p}$$

$$\cdot g_{r_1 \rho_1} \cdots g_{r_m \rho_m} g^{s_1 \sigma_1} \cdots g^{s_{i-1} \sigma_{i-1}} g^{q\lambda} g^{s_{i+1} \sigma_{i+1}} \cdots g^{s_p \sigma_p}$$

$$- \{r_{m+1} r_i, q\} A^{\rho_1 \rho_2 - \rho_{i-1} \lambda \rho_{i+1} - \rho_m}_{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_p}$$

$$\cdot g_{r_1\rho_1} \cdots g_{r_{i-1}\rho_{i-1}} g_{q\lambda} g_{r_{i+1}\rho_{i+1}} \cdots g_{r_m\rho_m} g^{s_1\sigma_1} \cdots g^{s_p\sigma_p}.$$

$$+ A^{\rho_1\rho_2 - \rho_{i-1}\lambda\rho_{i+1} - \rho_m}_{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}$$

$$\cdot g_{r_1\rho_1} \cdots g_{r_{i-1}\rho_{i-1}} \frac{\partial g_{r_i\lambda}}{\partial x_{r_{m+1}}} g_{r_{i+1}\rho_{i+1}} \cdots g_{r_m\rho_m} g^{s_1\sigma_1} \cdots g^{s_p\sigma_p}$$

$$+ A^{\rho_1\rho_2 - \rho_m}_{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_{i-1}\lambda\sigma_{i+1} - \sigma_p}$$

$$\cdot g_{r_1\rho_1} \cdots g_{r_m\rho_m} g^{s_1\sigma_1} \cdots g^{s_{i-1}\sigma_{i-1}} \frac{\partial g^{s_i\lambda}}{\partial x_{r_{m+1}}} g^{s_{i+1}\sigma_{i+1}} \cdots g^{s_p\sigma_p}.$$

Considérons les termes en $A^{\rho_1\rho_2 - \rho_{i-1}\lambda\rho_{i+1} - \rho_m}_{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}$. On peut les écrire :

$$A^{\rho_1\rho_2 - \rho_{i-1}\lambda\rho_{i+1} - \rho_m}_{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p} g_{r_1\rho_1} \cdots g_{r_{i-1}\rho_{i-1}} g_{r_{i+1}\rho_{i+1}} \cdots g_{r_m\rho_m} g^{s_1\sigma_1} \cdots g^{s_p\sigma_p}$$
$$\left[\frac{\partial g_{r_i\lambda}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \{r_{m+1}r_i, q\}\, g_{q\lambda}\right].$$

Mais d'après (19,4) le crochet s'écrit :

$$\left[\frac{\partial g_{r_i\lambda}}{\partial x_{r_{m+1}}} - [r_{m+1}r_i, \lambda]\right]$$

ou :

$$[r_{m+1}\lambda, r_i]$$

ou enfin :

$$g_{r_i\rho_i} \{r_{m+1}\lambda, \rho_i\}.$$

L'ensemble des termes en $A^{\rho_1\rho_2 - \rho_{i-1}\lambda\rho_{i+1} - \rho_m}_{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p}$ s'écrit donc :

$$A^{\rho_1\rho_2 - \rho_{i-1}\lambda\rho_{i+1} - \rho_m}_{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_p} g_{r_1\rho_1} \cdots g_{r_m\rho_m} g^{s_1\sigma_1} \cdots g^{s_p\sigma_p} \{r_{m+1}\lambda, \rho_i\}.$$

Considérons maintenant les termes en $A^{\rho_1\rho_2 - \rho_m}_{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_{i-1}\lambda\sigma_{i+1} - \sigma_p}$. Ils s'écrivent :

$$A^{\rho_1\rho_2 - \rho_m}_{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_{i-1}\lambda\sigma_{i+1} - \sigma_p} g_{r_1\rho_1} \cdots g_{r_m\rho_m} g^{s_1\sigma_1} \cdots g^{s_{i-1}\sigma_{i-1}} g^{s_{i+1}\sigma_{i+1}} \cdots g^{s_p\sigma_p}$$
$$\left[\frac{\partial g^{s_i\lambda}}{\partial x_{r_{m+1}}} + g^{q\lambda} \{r_{m+1}q, s_i\}\right].$$

Nous allons transformer le crochet :

$$\frac{\partial g^{si\lambda}}{\partial x_{r_{m+1}}} + g^{q\lambda}\{r_{m+1}q, s_i\} = g_t^{si}\left[\frac{\partial g^{t\lambda}}{\partial x_{r_{m+1}}} + g^{q\lambda}\{r_{m+1}q, t\}\right]$$

$$= g^{si\mu}\left[g_{\mu t}\frac{\partial g^{t\lambda}}{\partial x_{r_{m+1}}} + g^{q\lambda}g_{\mu t}g^{t\varepsilon}[r_{m+1}q, \varepsilon]\right]$$

$$= g^{si\mu}\left[g_{\mu q}\frac{\partial g^{q\lambda}}{\partial x_{r_{m+1}}} + g^{q\lambda}[r_{m+1}q, \mu]\right]$$

$$= -g^{si\mu}g^{q\lambda}[r_{m+1}\mu, q] \quad \text{car} \quad g_{\mu q}\frac{\partial g^{q\lambda}}{\partial x_{r_{m+1}}} = -g^{q\lambda}\frac{\partial g_{\mu q}}{\partial x_{r_{m+1}}}$$

$$= -g^{si\mu}\{r_{m+1}\mu, \lambda\}.$$

En remplaçant μ par σ_i on voit que les termes en :

$$A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}\lambda\sigma_{i+1}\ldots\sigma_p}$$

s'écrivent :

$$-A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}\lambda\sigma_{i+1}\ldots\sigma_p}\, g_{r_1\rho_1}\cdots g_{r_m\rho_m}g^{s_1\sigma_1}\cdots g^{s_p\sigma_p}\{r_{m+1}\sigma_i, \lambda\}.$$

Finalement nous obtenons la formule :

$$g_{r_{m+1}\rho_{m+1}}A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m\rho_{m+1}}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p} = \frac{\partial A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p}}{\partial x_{r_{m+1}}}$$

$$+\{r_{m+1}\lambda, \rho_i\}A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}\lambda\rho_{i+1}\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p} - \{r_{m+1}\sigma_i, \lambda\}A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}\lambda\sigma_{i+1}\ldots\sigma_p},$$

ou en changeant légèrement les notations :

$$A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m\rho_{m+1}}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p} = g^{\rho_{m+1}\tau}\left[\frac{\partial A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p}}{\partial x_\tau} + \{\tau\lambda, \rho_i\}A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}\lambda\rho_{i+1}\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p}\right.$$

$$\left. - \{\tau\sigma_i, \lambda\}A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}\lambda\sigma_{i+1}\ldots\sigma_p}\right]; \quad (26^b5)$$

c'est ce tenseur que l'on appelle la *dérivée contrevariante* du tenseur $A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p}$. Si nous multiplions les deux membres de ($26\,b.\,5$) par $g_{\rho_{m+1}\sigma_{p+1}}$ il vient :

$$g_{\rho_{m+1}\sigma_{p+1}} A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m\rho_{m+1}}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p} = \frac{\partial A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p}}{\partial x_{\sigma_{p+1}}}$$

$$+ \{\sigma_{p+1}\lambda, \rho_i\} A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}\lambda\rho_{i+1}\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p} - \{\sigma_{p+1}\sigma_i, \lambda\} A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}\lambda\sigma_{i+1}\ldots\sigma_p}.$$

En se reportant à (26 *b*. 4) on voit que le second membre est la dérivée covariante de $A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p}$; on a donc :

$$A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p\sigma_{p+1}} = g_{\rho_{m+1}\sigma_{p+1}} A^{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m\rho_{m+1}}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p},$$

ce qui est la loi d'association des tenseurs (§ 18). Notre définition de la dérivée contrevariante est donc bien d'accord avec cette loi. Cela montre également que l'on peut toujours dans les calculs remplacer la dérivée contrevariante d'un tenseur par son expression en fonction de la dérivée covariante, obtenue d'après la règle du § 18.

Résumé. — Les tenseurs sont des quantités obéissant à certaines lois de transformation. Ce qui fait leur importance, c'est que toute équation tensorielle vérifiée pour un seul système de coordonnées ne cesse pas d'être vérifiée quand on change les coordonnées d'une manière quelconque. On reconnaît en général que telle expression est un tenseur en cherchant sa loi de transformation ou bien en se fondant sur la propriété que la somme, la différence, le produit ou le quotient de deux tenseurs est encore un tenseur, cette propriété n'étant qu'une généralisation de la méthode des *dimensions* bien connue des physiciens.

Les principales opérations du calcul tensoriel sont l'addition, la multiplication, la sommation (§ 14), la contraction (§ 16), la substitution (§ 17), le passage des indices en haut ou en bas (§ 19), la différentiation covariante (§§ 21, 23). L'opération de la division n'existe pas ; pourtant ,on peut faire disparaître un facteur gênant $g^{\mu\nu}$ ou $g_{\mu\nu}$ en multipliant par $g_{\mu\nu}$ ou $g^{\mu\nu}$ de façon à former l'opérateur de substitution. L'opération de la sommation échappe en quelque sorte à notre contrôle, et se présente toujours à nous comme un fait accompli. La règle

de manipulation la plus caractéristique de cette méthode de calcul, c'est la modification arbitraire que l'on peut faire subir aux indices muets (ceux qui apparaissent deux fois dans le même terme) ; c'est, je crois, avec cette règle que le débutant a le plus de peine à se familiariser.

Comme, dans cet Ouvrage, nous n'avons affaire presque exclusivement qu'à des tenseurs, le lecteur peut être conduit à oublier que cette dernière propriété est absolument exceptionnelle. Les tours de passe-passe que nous paraissons faire avec nos calculs, ne sont possibles que par suite du caractère très particulier des éléments dont nous nous servons.

Les développements ultérieurs du calcul tensoriel seront résumés au § 35, mais nous en savons maintenant suffisamment pour pouvoir commencer la théorie de la gravitation.

SECTION III.

La loi de gravitation.

27. Caractères de l'espace-temps euclidien.

Quand l'espace-temps est euclidien, on peut faire usage de coordonnées galiléennes de sorte que les symboles à trois indices s'annulent tous ; mais, comme ces symboles à trois indices ne sont pas des tenseurs, ils ne s'annuleront plus en général quand, tout en restant dans l'espace-temps euclidien, on les rapportera à des coordonnées autres que les coordonnées galiléennes.

Le tenseur de Riemann-Christoffel, composé de produits et de dérivées des symboles à trois indices, s'annule aussi en coordonnées galiléennes ; comme c'est un tenseur, il restera nul pour n'importe quelle transformation de coordonnées effectuée sans changement du genre de l'espace-temps. Pour que l'espace-temps soit euclidien, il *faut* donc que le tenseur de Riemann-Christoffel soit nul.

La condition est également suffisante — si le tenseur de Riemann-Christoffel est nul, l'espace-temps est euclidien. En effet, d'après (25,2), ceci s'écrit :

$$B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = 0.$$

Il en résulte :

$$A_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\sigma\nu}. \qquad (27,1)$$

Il s'ensuit qu'un vecteur qui décrit sans variation absolue (par déplacement parallèle) un contour fermé quelconque, reprend à son retour au point de départ sa valeur primitive. Un déplacement parallèle d'un point à un autre donne donc un résultat complètement indépendant du chemin suivi. Si l'on

prend un certain vecteur A_μ en un certain point et que, par déplacements parallèles, on le fasse passer par tous les points de l'espace-temps, on obtient ce que l'on appelle un champ de vecteur *uniforme*. Par définition, cette uniformité s'exprime par la condition $A_{\mu\sigma} = 0$. Il est facile de voir que l'existence du champ de vecteur uniforme ainsi défini n'est possible que parce que l'équation (27,1) est vérifiée ; dans les autres cas l'équation $A_{\mu\sigma} = 0$ ne sera pas intégrable et l'existence d'un champ de vecteur uniforme sera rendue impossible.

Il est facile de voir que si les quatre côtés de nos mailles d'espace-temps appartiennent eux-mêmes à des champs de vecteurs uniformes, nos coordonnées seront des coordonnées cartésiennes obliques. Voici une démonstration analytique de cette proposition. Soient $A^\mu_{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) les quatre vecteurs-champs uniformes tels que :

$$A^\mu_{(\alpha)\sigma} = 0,$$

ou d'après (21,2) :

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} A^\mu_{(\alpha)} = - \{\varepsilon\sigma, \mu\} A^\varepsilon_{(\alpha)} . \tag{27,2}$$

Effectuons maintenant une transformation de coordonnées, les vecteurs contrevariants étant transformés suivant la loi :

$$dx_\mu = A^\mu_{(\alpha)} dx'_\alpha .$$

Alors :

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} dx'_\alpha dx'_\beta &= g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \\ &= g_{\mu\nu} A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} dx'_\alpha dx'_\beta . \end{aligned}$$

Donc :

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} . \tag{27,3}$$

En dérivant par rapport à x_σ les deux membres de cette équation :

$$\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = g_{\mu\nu} A^\mu_{(\alpha)} \frac{\partial A^\nu_{(\beta)}}{\partial x_\sigma} + g_{\mu\nu} A^\nu_{(\beta)} \frac{\partial A^\mu_{(\alpha)}}{\partial x_\sigma} + A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

$$= - g_{\mu\nu} A^\mu_{(\alpha)} A^\varepsilon_{(\beta)} \{\varepsilon\sigma, \nu\} - g_{\mu\nu} A^\varepsilon_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} \{\varepsilon\sigma, \mu\} + A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

$$= A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} \left[- g_{\mu\varepsilon} \{\nu\sigma, \varepsilon\} - g_{\varepsilon\nu} \{\mu\sigma, \varepsilon\} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right],$$

en permutant les indices :

$$= A^\mu_{(\alpha)} A^\nu_{(\beta)} \left[- [\nu\sigma, \mu] - [\mu\sigma, \nu] + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right]$$

$$= 0 \qquad\qquad \text{d'après } (19{,}5).$$

$g'_{\alpha\beta}$ est donc constant. Nous avons par suite trouvé une transformation qui rend en tous points les g constants ; nous pouvons ensuite faire une nouvelle transformation qui nous ramène aux coordonnées galiléennes comme au § 2.

Ainsi, pour que l'espace-temps soit euclidien, il faut et il suffit que le tenseur de Riemann-Christoffel soit nul.

28. La loi de gravitation d'Einstein.

Le tenseur de Riemann-Christoffel contracté $G_{\mu\nu}$ s'obtient en faisant $\varepsilon = \sigma$ dans $B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$. D'après (25,3) :

$$G_{\mu\nu} = \{\mu\sigma, \alpha\} \{\nu\alpha, \sigma\} - \{\mu\nu, \alpha\} \{\alpha\sigma, \sigma\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \{\alpha\sigma, \sigma\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \{\mu\nu, \sigma\}. \quad (28{,}1)$$

Chacun des symboles où apparaît deux fois le même indice est transformé selon (26,4), et l'expression (28,1), après quelques modifications dans les indices muets, prend la forme :

$$G_{\mu\nu} = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{\mu\nu, \alpha\} + \{\mu\alpha, \beta\} \{\nu\beta, \alpha\}$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \log \sqrt{-g} - \{\mu\nu, \alpha\} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \log \sqrt{-g}. \quad (28{,}2)$$

Einstein, pour les raisons que nous avons exposées au Chapitre V, a pris pour loi de gravitation dans un espace vide :

$$G_{\mu\nu} = 0. \qquad (28{,}3)$$

Nous pouvons remarquer que la contraction obtenue en faisant $\varepsilon = \mu$ ne fournit pas un tenseur nouveau car le résultat s'annule identiquement [1].

Le tenseur $G_{\mu\nu}$ étant symétrique, la loi d'Einstein équivaut à dix équations dont quatre, il est vrai, sont des identités que nous établirons plus tard. Comme dans l'équation de Laplace pour la loi de Newton, les dérivées secondes des $g_{\mu\nu}$ entrent linéairement dans la loi d'Einstein. Il existe d'autres tenseurs fondamentaux du second ordre formés par contraction de tenseurs du sixième ordre ou d'ordres supérieurs, mais dans ces tenseurs contractés entreraient des dérivées des $g_{\mu\nu}$ d'un ordre supérieur au second. On peut cependant, sans introduire une telle complication, imaginer simplement une autre équation tensorielle telle que :

$$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}, \tag{28,4}$$

où λ est une constante. C'est une équation de cette forme qui servit de point de départ à Einstein et à de Sitter dans leurs théories de l'espace-temps courbe (Chapitre X). Si (28,4) est la loi exacte, il ne peut y avoir dans un espace-temps vide de matière, de régions qui soient rigoureusement euclidiennes ; seulement nous pouvons prendre λ assez petit pour éviter tout conflit entre la théorie et l'expérience.

L'invariant contracté $G = g^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$ a reçu le nom de « courbure » de l'espace-temps. Nous devons néanmoins signaler que les tenseurs $G_{\mu\nu}$ et $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ donnent une mesure bien plus précise des divergences qui font que l'espace-temps n'est pas euclidien et la condition de courbure nulle n'exprime pas la planéité de l'Univers.

29. Le champ d'une particule isolée.

Nous allons maintenant chercher une solution particulière des équations (28,3), qui nous fera connaître le champ dû à une

(1) $B^{\mu}_{\mu\nu\sigma} = g^{\mu\rho}B_{\mu\nu\sigma\rho}$ qui s'annule car $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ est symétrique gauche en μ et ρ (§ 25).

particule matérielle au repos à l'origine. Pour nous guider dans cette recherche nous allons essayer de déterminer *a priori* la forme de la solution que nous pouvons nous attendre à trouver. Il n'est pas nécessaire que ce raisonnement préliminaire soit rigoureux ; l'essentiel, c'est qu'il réussisse.

On a l'intuition que l'expression de l'intervalle élémentaire pourra se mettre sous la forme :

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu}(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^{\nu} dt^2,$$

λ, μ, ν étant des fonctions de r seulement, qui s'annulent à l'infini, de sorte qu'à grande distance de la particule, l'expression de l'intervalle prend la même forme qu'en coordonnées polaires dans un espace-temps euclidien.

Nous n'écrivons pas les termes rectangles $dxd\theta$, $dxdt$, etc. pour tenir compte d'abord de la symétrie dans l'espace de la particule et de son champ, ensuite de la symétrie dans le temps de son histoire passée et future.

On peut apporter une dernière simplification en posant $r^2 e^{\mu} = r'^2$ et en adoptant r' comme coordonnée à la place de r. La modification qui en résulte pour dr^2 peut être compensée par le choix d'une nouvelle fonction λ ; on peut donc faire disparaître le coefficient e^{μ} et finalement nous prendrons comme forme d'essai l'expression :

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{\nu} dt^2. \qquad (29,1)$$

Il en résulte, en comparant cette expression avec la forme générale $g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}$:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = r, & x_2 = \theta, & x_3 = \varphi, & x_4 = t, \\ g_{11} = -e^{\lambda}, & g_{22} = -r^2, & g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, & g_{44} = e^{\nu}, \end{array}\right\} \qquad (29,2)$$

et tous les $g_{\mu\nu}$ avec $\mu \neq \nu$ sont nuls.

Le déterminant g se réduit à sa diagonale principale :

$$-g = e^{\lambda+\nu} r^4 \sin^2 \theta. \qquad (29,3)$$

On a également :

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \qquad \text{etc.} \ .$$

Les $g_{\mu\nu}$ s'annulant pour $\mu \neq \nu$, il n'y a plus de sommation à effectuer dans les symboles à trois indices (19,2), et :

$$\{\mu\nu, \sigma\} = \frac{1}{2}\, g^{\sigma\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right) \text{ (sans sommation).}$$

Nous obtenons donc les formules suivantes (la convention de sommation étant momentanément supprimée et μ, ν, σ étant supposés différents) :

$$\left.\begin{aligned}
\{\mu\mu, \mu\} &= \frac{1}{2g_{\mu\mu}}\,\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\mu},\\
\{\mu\mu, \nu\} &= -\frac{1}{2g_{\nu\nu}}\,\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\nu},\\
\{\mu\nu, \nu\} &= \frac{1}{2g_{\nu\nu}}\,\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x_\mu},\\
\{\mu\nu, \sigma\} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (29,4)$$

En utilisant (29,2) et en désignant par des accents la dérivation par rapport à r, nous avons :

$$\left.\begin{aligned}
\{11,1\} &= \frac{1}{2}\lambda',\\
\{12,2\} &= \frac{1}{r},\\
\{13,3\} &= \frac{1}{r},\\
\{14,4\} &= \frac{1}{2}\nu',\\
\{22,1\} &= -re^{-\lambda},\\
\{23,3\} &= \cot g\,\theta,\\
\{33,1\} &= -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda},\\
\{33,2\} &= -\sin\theta\cos\theta,\\
\{44,1\} &= \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'.
\end{aligned}\right\} \qquad (29,5)$$

Les 31 autres symboles sont nuls. Signalons que

$$\{21,2\} = \{12,2\}, \quad \text{etc.} \quad .$$

Il n'y a aucune difficulté à porter ces valeurs dans (28,2), mais pour aider le lecteur, nous allons d'abord écrire les équations (28,2) développées en nous abstenant de transcrire les 223 termes qui, d'après ce qui précède, sont évidemment nuls :

$$G_{11} = -\frac{\partial}{\partial r}\{11,1\} + \{11,1\}\{11,1\} + \{12,2\}\{12,2\} + \{13,3\}\{13,3\} + \{14,4\}\{14,4\} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\log\sqrt{-g} - \{11,1\}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{-g} = 0,$$

$$G_{22} = -\frac{\partial}{\partial r}\{22,1\} + 2\{22,1\}\{21,2\} + \{23,3\}\{23,3\} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\log\sqrt{-g} - \{22,1\}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{-g} = 0,$$

$$G_{33} = -\frac{\partial}{\partial r}\{33,1\} - \frac{\partial}{\partial \theta}\{33,2\} + 2\{33,1\}\{31,3\} + 2\{33,2\}\{32,3\} - \{33,1\}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{-g} - \{33,2\}\frac{\partial}{\partial \theta}\log\sqrt{-g} = 0,$$

$$G_{44} = -\frac{\partial}{\partial r}\{44,1\} + 2\{44,1\}\{41,4\} - \{44,1\}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{-g} = 0,$$

$$G_{12} = \{13,3\}\{23,3\} - \{12,2\}\frac{\partial}{\partial \theta}\log\sqrt{-g} = 0.$$

Les autres équations sont identiquement nulles.

Portant dans les équations précédentes les valeurs tirées de (29,5) et de (29,3), il vient après simplification :

$$G_{11} = \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} = 0, \qquad (29,61)$$

$$G_{22} = e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')\right] - 1 = 0, \qquad (29,62)$$

$$G_{33} = \sin^2\theta . e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')\right] - \sin^2\theta = 0, \qquad (29,63)$$

$$G_{44} = e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\nu'}{r}\right) = 0, \qquad (29,64)$$

$$G_{12} = 0 \qquad = 0. \qquad (29,65)$$

Nous pouvons laisser de côté l'équation (29,63) qui n'est

que la répétition de (29,62) ; nous avons donc trois équations (29,61), (29,62), (29,64), pour déterminer λ et ν. Les équations (29,61) et (29,64) donnent $\lambda' = -\nu'$. Choisissons la solution $\lambda = -\nu$, puisque l'espace-temps ne pourra être euclidien à l'infini que si λ et ν s'y annulent ensemble. (29,62) donne alors :

$$e^{\nu}(1 + r\nu') = 1.$$

Posons $e^{\nu} = \gamma$:

$$\gamma + r\gamma' = 1.$$

D'où en intégrant :

$$\gamma = 1 - \frac{2m}{r} \qquad (29,7)$$

$2m$ étant une constante d'intégration.

Toutes les équations sont satisfaites par cette solution. Par conséquent, l'expression :

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + \gamma dt^2 \qquad (29,8)$$

où $\gamma = 1 - \frac{2m}{r}$ est une solution particulière de la loi de gravitation d'Einstein.

Cette solution donne un espace-temps euclidien à distance infinie de l'origine ($\gamma = 1$). Elle n'est singulière que pour l'origine car γ y devient infini. Comme c'est une singularité statique et symétrique dans l'espace, on peut s'attendre à ce qu'elle corresponde à une particule unique en repos à l'origine. De plus, la constante d'intégration m étant arbitraire, cela permet d'expliquer que des particules de masses différentes puissent avoir des champs de force d'intensités différentes.

30. Orbites planétaires.

La trajectoire d'une particule libre dans un champ de gravitation est donnée par les équations d'une géodésique (20,4) :

$$\frac{d^2x_\alpha}{ds^2} + \{\mu\nu, \alpha\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0. \qquad (30,1)$$

Faisons d'abord $\alpha = 2$:

$$\frac{d^2x_2}{ds^2} + \left\{12,2\right\} \frac{dx_1}{ds} \frac{dx_2}{ds} + \left\{21,2\right\} \frac{dx_2}{ds} \frac{dx_1}{ds} + \left\{33,2\right\} \frac{dx_3}{ds} \frac{dx_3}{ds} = 0$$

car d'après (29,5) il est inutile de considérer les autres valeurs de μ et de ν. En remplaçant dans cette équation les symboles à trois indices par leurs valeurs tirées de (29,5), il vient :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0. \qquad (30,2)$$

Choisissons les coordonnées de telle sorte qu'à l'instant initial le point matériel se meuve dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$; alors à cet instant initial $\frac{d\theta}{ds} = 0$, et $\cos\theta = 0$ de sorte que $\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$. La particule continue donc à se mouvoir dans ce plan et nous pouvons simplifier les autres équations en y faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les équations pour $\alpha = 1, 3, 4$ s'écrivent :

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2}\lambda' \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - re^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0, \qquad (30,31)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \qquad (30,32)$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \nu' \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \qquad (30,33)$$

Les deux dernières équations s'intègrent immédiatement et donnent :

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h, \qquad (30,41)$$

$$\frac{dt}{ds} = ce^{-\nu} = \frac{c}{\gamma}, \qquad (30,42)$$

h et c étant deux constantes d'intégration.

A ces équations nous pouvons adjoindre l'équation (29,8) :

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \gamma \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = -1 \qquad (30,43)$$

qui joue le rôle d'une intégrale d'énergie.

Eliminons dt et ds au moyen de (30,41) et de (30,42) :

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{c^2}{\gamma} = -1 .$$

D'où :

$$\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = c^2 - 1 + \frac{2m}{r} + \frac{2mh^2}{r^3} .$$

Posons $u = \frac{1}{r}$; cette dernière équation devient :

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2 - 1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2} + 2mu^3, \qquad (30,5)$$

et en différentiant par rapport à θ :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2. \qquad (30,6)$$

Rappelons que l'équation newtonienne de l'orbite est :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2} . \qquad (30,7)$$

31. Le mouvement du périhélie.

Dans l'équation (30,6) le rapport des deux termes $3mu^2$ et $\frac{m}{h^2}$ est $3h^2u^2$, qui d'après (30,41) est égal à :

$$3\left(r\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 .$$

Pour les vitesses ordinaires cette quantité est extrêmement petite — pratiquement trois fois le carré de la vitesse transversale de la planète (la vitesse de la lumière étant prise pour unité).

Par suite, l'orbite d'Einstein est presque identique à celle de Newton, la seule différence provenant du terme $3mu^2$ qui n'apporte qu'une correction très petite ; de plus, la constante d'intégration m dans (30,6) se trouve maintenant à très peu près identique à la masse gravitationnelle m de la théorie de Newton dans (30,7).

L'équation (30,5) peut, bien entendu, s'intégrer par les

fonctions elliptiques ; il est plus simple cependant de partir de (30,6) et de procéder par approximations successives. Si l'on néglige le terme $3mu^2$, la solution est :

$$u = \frac{m}{h^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \varpi)\right] \tag{31,1}$$

comme dans la dynamique newtonienne. La constante ϖ est la longitude du périhélie.

Portons dans le terme correctif $3mu^2$ cette valeur approchée de u. (30,6) devient alors :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4} + \frac{6m^3}{h^4} e\cos(\varphi - \varpi) + \frac{3}{2}\frac{m^3e^2}{h^4}\left[1 + \cos 2(\varphi - \varpi)\right]. \tag{31,2}$$

Parmi les termes additionnels très petits, le seul qui puisse avoir un effet appréciable est le terme en $\cos(\varphi - \varpi)$ qui a précisément la période voulue pour produire un effet de résonance s'accusant sans cesse de plus en plus. Si nous nous souvenons qu'une intégrale particulière de :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = A\cos\varphi$$

est :

$$u = \frac{1}{2} A\varphi \sin\varphi,$$

le terme en $\cos(\varphi - \varpi)$ donne un élément de la solution complète u :

$$u_1 = \frac{3m^3}{h^4} e\varphi \sin(\varphi - \varpi). \tag{31,3}$$

Une solution plus approchée pour u sera donc :

$$u = \frac{m}{h^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \varpi) + \frac{3m^2}{h^2}\varphi e \sin(\varphi - \varpi)\right] \tag{31,4}$$
$$= \frac{m}{h^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \varpi - \delta\varpi)\right]$$

où $\delta\varpi = \frac{3m^2}{h^2}\varphi$, et en négligeant $\delta\varpi^2$.

Pendant que la planète effectue une révolution, le périhélie s'avance d'une fraction de tour complet égale à :

$$\frac{\delta\varpi}{\varphi} = \frac{3m^2}{h^2} = \frac{3m}{a(1-e^2)} = \frac{12\pi^2a^2}{C^2T^2(1-e^2)} \tag{31,5}$$

où T est la période planétaire et C la vitesse de la lumière que nous avons rétablie.

Pour une orbite circulaire $\frac{m}{a} = v^2$ $\left(\text{ou } \frac{v^2}{C^2} \text{ en unités ordinaires}\right)$, de sorte que nous avons :

$$\frac{\delta\varpi}{\varphi} = \frac{3v^2}{C^2}, \tag{31,6}$$

expression que nous avons signalée p. 153.

32. La déviation de la lumière.

Pour un mouvement se faisant avec la vitesse de la lumière $ds = 0$; d'après (30,41) la constante h est donc infinie. Dans ce cas l'équation différentielle de l'orbite (30,6) prend la forme :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3mu^2. \tag{32,1}$$

La trajectoire suivie par une impulsion lumineuse est la même que celle d'une particule matérielle se mouvant avec la vitesse de la lumière — ou plus exactement, c'est la limite vers laquelle tend la trajectoire d'une particule matérielle quand sa vitesse tend vers celle de la lumière. Donc (32,1) est l'équation d'un rayon lumineux.

Nous pouvons intégrer par approximations successives ; une solution de l'équation approchée :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$$

est la ligne droite :

$$u = \frac{\cos\varphi}{R}. \tag{32,2}$$

En portant cette valeur approchée dans le terme très petit $3mu^2$, il vient :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3m}{R^2}\cos^2\varphi.$$

Une intégrale particulière de cette équation est :

$$u_1 = \frac{m}{R^2}(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi).$$

D'où la solution plus approchée :

$$u = \frac{\cos\varphi}{R} + \frac{m}{R^2}(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi). \qquad (32,3)$$

Multiplions les deux membres de cette solution par rR :

$$R = r\cos\varphi + \frac{m}{R}\,\frac{r^2\cos^2\varphi + 2r^2\sin^2\varphi}{r},$$

de sorte qu'en coordonnées cartésiennes l'équation du rayon lumineux s'écrit :

$$x = R - \frac{m}{R}\,\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (32,4)$$

Le deuxième terme du membre de droite est l'expression de la légère déviation du rayon lumineux par rapport à la droite $x = R$.

Pour trouver les asymptotes il suffit de prendre y très grand par rapport à x. L'équation devient alors :

$$x = R \pm \frac{2m}{R}\,y.$$

L'angle des asymptotes, c'est-à-dire la déviation totale de la lumière à son passage dans le champ de gravitation est donc :

$$\frac{4m}{R}$$

comme nous l'avions dit p. 136.

33. Le principe d'équivalence.

L'énoncé du principe d'équivalence peut recevoir cette forme : les actions locales qui s'exercent entre les entités physiques d'un Univers courbé sont les mêmes que si ces entités se trouvaient dans l'Univers tangent. Si donc nous ramenons nos lois physiques aux interactions locales, autrement dit si nous les traduisons par des équations différentielles, elles seront

valables à la fois dans l'espace-temps courbe et dans l'espace-temps euclidien pour lequel elles avaient été primitivement formulées.

Il devient donc impossible de distinguer expérimentalement une région courbe de petite étendue (contenant un champ de gravitation naturel) de la région plane tangente (dans laquelle le champ de force est « fictif »). Telle est la forme en quelque sorte vulgaire du principe. Son sens général est simple mais son application rigoureuse dépend de ce que nous entendons par région de *petite* étendue.

Les équations différentielles $B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = 0$ auxquelles satisfait l'espace-temps euclidien sont du deuxième ordre ; donc l'Univers plan aura mêmes $g_{\mu\nu}$ et mêmes dérivées premières des $g_{\mu\nu}$ que l'Univers courbe auquel il est tangent, mais il en différera par leurs dérivées secondes. On peut s'attendre par suite à ce que toute loi physique exprimée par des équations différentielles ne contenant pas de dérivées d'un ordre supérieur au premier et qui s'applique à l'espace-temps euclidien, soit également valable dans l'espace-temps non euclidien. Il est clair, je pense, que l'on ne peut considérer cette proposition comme une règle générale. Il peut y avoir des cas où les lois applicables à l'Univers paraissent ne pas contenir de dérivées secondes parce que celles-ci n'entrent que par des combinaisons qui disparaissent en espace-temps euclidien, par exemple le tenseur de Riemann-Christoffel ; il serait nécessaire dans ce cas particulier de rétablir le tenseur dans les équations générales.

Nous devons nous contenter de laisser le principe d'équivalence sous forme de suggestion. — Beaucoup de phénomènes fondamentaux sont si simples que le tenseur de Riemann-Christoffel ne saurait entrer dans les équations qui les traduisent, de sorte que si nous n'avons aucune raison de penser que la courbure d'Univers peut agir sur eux, les lois que représentent ces équations et qui sont valables pour l'espace-temps euclidien sont absolument générales (1).

(1) Le principe des dimensions est d'une application fréquente ; il se peut qu'il soit impossible d'introduire le tenseur de Riemann-Christoffel dans l'équation sans y faire entrer également une nouvelle constante nécessaire pour rendre à l'équation son homogénéité physique primitive.

Pour montrer l'utilité de ces remarques, prenons comme exemple la détermination des équations générales d'une géodésique [1]. Soit :

$$A^{\alpha} = \frac{dx_{\alpha}}{ds}.$$

D'après (21,1) :

$$A^{\alpha}_{\nu} = \frac{\partial}{dx_{\nu}}\left(\frac{dx_{\alpha}}{ds}\right) + \{\mu\nu, \alpha\}\frac{dx_{\mu}}{ds}.$$

De là nous tirons :

$$A^{\nu}A^{\alpha}_{\nu} = \frac{d^2x_{\alpha}}{ds^2} + \{\mu\nu, \alpha\}\frac{dx_{\mu}}{ds}\frac{dx_{\nu}}{ds}. \qquad (33,1)$$

Ainsi le second membre de cette équation est un tenseur qui, en coordonnées galiléennes, se réduit à $\frac{d^2x_{\alpha}}{ds^2}$; annuler ce tenseur revient donc à écrire les équations d'une ligne droite ; c'est-à-dire d'une ligne de longueur stationnaire. L'expression (33,1) ne contient que les dérivées premières des g ; par conséquent, si nous écrivons que cette expression est nulle, nous aurons l'équation générale de la ligne de longueur stationnaire pour n'importe quel genre d'espace.

Cette démonstration est rigoureuse car elle est entièrement géométrique et nul élément inconnu n'entre dans la transition qui nous fait passer de l'espace tangent à l'espace courbe. Si au contraire nous avions dit : — « On sait expérimentalement que la trajectoire d'une particule libre obéit à cette équation tensorielle en coordonnées galiléennes ; la même équation donne donc la trajectoire d'une particule libre dans n'importe quel genre d'espace-temps » —, nous aurions fait l'hypothèse physique qu'une particule se meut sans tenir compte de la courbure d'Univers, comme si elle était à chaque instant dans l'Univers tangent.

Nous nous servirons peu du principe d'équivalence dans notre discussion mathématique parce que nous procédons essen-

[1] Cette démonstration peut remplacer celle que nous avons déjà donnée au § 22.

tiellement par voie déductive. Nous partons d'une théorie de l'Univers dont nous suivons les conséquences expérimentales, de sorte que nous allons des lois générales aux lois particulières. Mais si nous avions raisonné par induction en remontant des lois particulières découvertes expérimentalement aux lois générales, il nous aurait fallu un principe directeur que nous aurait précisément fourni le principe d'équivalence.

34. Remarques.

Si dans (29,8), nous remplaçons r par $(r+m)$ l'équation devient approximativement :

$$ds^2 = -\left(1+\frac{2m}{r}\right)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2)+\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2$$
$$= -\left(1+\frac{2m}{r}\right)(dx^2+dy^2+dz^2)+\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2, \qquad (34,1)$$

en négligeant $\frac{m^2}{r^2}$.

Cette solution a l'inconvénient de n'être qu'approchée, mais à certains égards les coordonnées auxquelles elle se rapporte sont plus naturelles. Ainsi, en un point quelconque, la vitesse de la lumière est représentée par une expression qui lui donne une même valeur quelle que soit la direction, et la longueur d'une règle courte exprimée en fonction des coordonnées est indépendante de son orientation. Le caractère dissymétrique des coordonnées (29,8) ne présente en réalité aucun inconvénient sérieux car toutes nos mesures sont faites sur la Terre où le rapport $\frac{m}{r}$ est négligeable. L'équation (34,1) ne donnerait pas le mouvement correct du périhélie de Mercure, parce que le degré d'approximation n'y est pas assez élevé ; le coefficient de dt^2 est en réalité $\left(1-\frac{2m}{r+m}\right)$ ce qui fournit un terme $\frac{2m^2dt^2}{r^2}$ qui est loin d'être négligeable dans l'explication du mouvement du périhélie (1).

(1) En opérant dans (29,8) la substitution

$$r = \left(1+\frac{m}{2r_1}\right)^2 r_1$$

En comparant (30,6) avec les formules de la dynamique du point matériel, nous voyons que l'orbite d'Einstein est identique à celle qui serait décrite sous l'effet d'une force inversement proportionnelle au carré de la distance, à laquelle viendrait s'ajouter une force beaucoup plus petite variant en raison inverse de la quatrième puissance de la distance. Cependant, il serait incorrect de dire que ces forces peuvent remplacer la loi de gravitation d'Einstein, car l'équation (30,6) ne donne que la forme de l'orbite ; la vitesse avec laquelle cette orbite est décrite diffère complètement dans les deux cas.

Autant qu'il me semble, les hypothèses auxquelles nous avons fait appel dans la discussion actuelle sont les suivantes :

1° La localisation des événements n'entre dans les phénomènes observables que par la relation d'Univers ds qui unit deux événements infiniment voisins.

2° La loi de gravitation dans l'espace vide est $G_{\mu\nu} = 0$.

3° La ligne d'Univers d'une particule entièrement libre est une géodésique.

4° La vitesse de la lumière est la « vitesse fondamentale » de sorte que dans *tous* les cas le rayon lumineux est donné par $ds = 0$.

On ne peut rien objecter à la première hypothèse qui est purement négative. Si l'on finissait par découvrir des phénomènes où la localisation des événements interviendrait sous une forme différente de celle que nous avons supposée, cela nécessiterait tout juste un supplément à notre exposé actuel mais ne pourrait modifier en rien le fond du raisonnement. La seconde hypothèse peut être remplacée par d'autres, mais ces autres font intervenir d'énormes complications. Les hypothèses (3) et (4) sont des généralisations faites sur des résultats expérimentaux avec l'aide du principe d'équivalence ; ce qui

on obtient une expression du ds^2 qui est symétrique par rapport aux coordonnées d'espace :

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{m}{2r_1}\right)^4 (dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2) + \frac{\left(1 - \frac{m}{2r_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r_1}\right)^2} dt^2,$$

et qui se réduit à (34,1) quand on néglige m^2.

les rend probales c'est que l'on ne connaît pas d'autres hypothèses vraisemblables qui pourraient les remplacer.

Dans les Sections IV et V nous conserverons l'hypothèse (1), mais nous retrouverons les autres hypothèses en partant du point de vue nouveau dont nous avons parlé au Chapitre XII. En aucun cas les hypothèses (2) et (3) ne sont indépendantes ; c'est à nous de trouver la relation qui les unit et c'est cette relation qui constitue la base de la mécanique de la relativité.

SECTION IV.

MÉCANIQUE DE LA RELATIVITÉ.

35. Le tenseur symétrique gauche du quatrième ordre.

Un tenseur est dit symétrique gauche quand :

$$A_{\nu\mu} = - A_{\mu\nu}.$$

Dans ce cas, A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44} doivent évidemment être nuls.

Considérons un tenseur du quatrième ordre $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ qui soit symétrique gauche pour tous ses indices pris deux à deux. Toute composante de ce tenseur ayant deux indices égaux est évidemment nulle ; les seules composantes qui subsistent, sont celles pour lesquelles les indices α, β, γ, δ, sont tous différents, et ces composantes sont obtenues en faisant varier d'une manière arbitraire l'ordre des nombres 1, 2, 3, 4. On peut passer de E^{1234} à l'une quelconque des autres composantes en effectuant un certain nombre de permutations des indices deux à deux, chacune d'elles ayant simplement pour effet de changer le signe. Si nous écrivons E à la place de E^{1234}, chacune des 256 composantes du tenseur ne pourra prendre que l'une des trois valeurs :

$$+ E, \quad 0, \quad , - E.$$

Nous écrirons :

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = E . \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{35,1}$$

où $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ si les indices ne sont pas tous différents,

$= + 1$ si la permutation des indices est paire par rapport à l'ordre naturel 1, 2, 3, 4,

$= - 1$ si cette permutation est impaire.

E n'est pas un invariant ; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ n'est donc pas un tenseur.

Ce coefficient est particulièrement utile dans l'étude des déterminants. Si $|k_{\mu\nu}|$ désigne un déterminant formé des éléments $k_{\mu\nu}$ (qui ne forment pas nécessairement un tenseur), nous avons :

$$4\,! \times |k_{\mu\nu}| = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\varepsilon\zeta\eta\theta}k_{\alpha\varepsilon}k_{\beta\zeta}k_{\gamma\eta}k_{\delta\theta}, \tag{35,2}$$

car un terme quelconque du déterminant est le produit de quatre facteurs obtenus en prenant un élément et un seul dans chaque ligne (α, β, γ, δ différents) et chaque colonne (ε, ζ, η, θ différents) et en affectant ce produit du coefficient $+1$ ou -1 suivant que les permutations formées par les rangs des lignes et des colonnes auxquelles appartiennent ces éléments dans l'ordre où ils sont pris sont de même classe ou sont de classes différentes.

Remarquons que :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4\,!. \tag{35,31}$$

Les deux déterminants les plus importants sont le déterminant fondamental g et le jacobien de la transformation :

$$J = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}.$$

D'après (35,2) :

$$4\,!\, g = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\varepsilon\zeta\eta\theta}g_{\alpha\varepsilon}g_{\beta\zeta}g_{\gamma\eta}g_{\delta\theta}, \tag{35,32}$$

$$4\,!\, J = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\varepsilon\zeta\eta\theta}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\varepsilon}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\zeta}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\eta}\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\theta}. \tag{35,33}$$

Nous allons montrer que :

$$g = J^2 g'.$$

D'après (35,32) et (35,33) nous avons :

$$(4\,!)^3 J^2 g' = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\varepsilon\zeta\eta\theta}g'_{\alpha\varepsilon}g'_{\beta\zeta}g'_{\gamma\eta}g'_{\delta\theta}\cdot\varepsilon_{\iota\kappa\lambda\mu}\varepsilon_{\nu\xi o\varpi}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\iota}\frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\kappa}\frac{\partial x'_o}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x'_\varpi}{\partial x_\mu}$$
$$\cdot\,\varepsilon_{\rho\sigma\tau\upsilon}\varepsilon_{\varphi\chi\psi\omega}\frac{\partial x'_\varphi}{\partial x_\rho}\frac{\partial x'_\chi}{\partial x_\sigma}\frac{\partial x'_\psi}{\partial x_\tau}\frac{\partial x'_\omega}{\partial x_\upsilon}. \tag{35,4}$$

Il y a dans le membre de droite environ 280 trillions de termes et nous allons ordonner ceux qui ne sont pas nuls. Considérons le produit :

$$\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\iota}\frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial x'_o}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x'_\varpi}{\partial x_\mu}.$$

Si l'on ne tient pas compte des termes qui s'annulent, les lettres $\nu\ \xi\ o\ \varpi$ représentent les mêmes quatre indices que $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ mais disposés dans un ordre différent. Si nous opérons des changements d'ordre de façon à rendre la permutation $\nu\ \xi\ o\ \varpi$ identique à la permutation $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, les indices des dénominateurs forment une nouvelle permutation $i\ k\ l\ m$ et l'on a :

$$\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\iota}\frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial x'_o}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x'_\varpi}{\partial x_\mu}=\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_k}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_l}\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_m} \qquad (35,41)$$

et :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\iota\varkappa\lambda\mu}=\varepsilon_{\nu\xi o\varpi}\varepsilon_{iklm}, \qquad (35,42)$$

le nombre des permutations deux à deux des différents indices des numérateurs étant égal au nombre des permutations deux à deux des différents indices des dénominateurs [1].

En opérant de même sur les quatre derniers termes, (35,4) devient :

$$(4\,!)^3 J^2 g' = g'_{\alpha\varepsilon} g'_{\beta\zeta} g'_{\gamma\eta} g_{\delta\theta}\cdot\varepsilon_{\nu\xi o\varpi}\varepsilon_{\nu\xi o\varpi}\varepsilon_{iklm}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_k}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_l}\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_m}$$
$$\cdot\varepsilon_{\varphi\chi\psi\omega}\varepsilon_{\varphi\chi\psi\omega}\varepsilon_{rstu}\frac{\partial x'_\varepsilon}{\partial x_r}\frac{\partial x'_\zeta}{\partial x_s}\frac{\partial x'_\eta}{\partial x_t}\frac{\partial x'_\theta}{\partial x_u}.$$

Mais d'après (15,22) :

$$g'_{\alpha\varepsilon}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial x'_\varepsilon}{\partial x_r}=g_{ir}.$$

D'où :

$$(4\,!)^3 J^2 g' = (4\,!)^2 \varepsilon_{iklm}\varepsilon_{rstu} g_{ir} g_{ks} g_{lt} g_{mu}$$
$$= (4\,!)^3 g \qquad \text{d'après } (35,32),$$

[1] Tout coefficient ε est égal à son inverse de sorte que (35,42) peut prendre différentes formes ; nous choisirons celle qui ne fera apparaître aucun indice trois fois quand on effectuera la substitution dans (35,4).

ce qui démontre bien le théorème.

Revenons au tenseur $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$; sa loi de transformation est :

$$E'^{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\delta} E^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Multiplions les deux membres de cette relation par $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$; il vient, en tenant compte de (25,1) :

$$E'.\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} = \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\delta} E$$

ce qui, d'après (35,31) et (35,33), s'écrit :

$$E' = JE. \qquad (35,5)$$

E n'est donc pas un invariant.

Mais on voit immédiatement que :

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta}E^{\varepsilon\zeta\eta\theta}g_{\alpha\varepsilon}g_{\beta\zeta}g_{\gamma\eta}g_{\delta\theta}$$

est un invariant qui est égal à :

$$E^2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\varepsilon\zeta\eta\theta}g_{\alpha\varepsilon}g_{\beta\zeta}g_{\gamma\eta}g_{\delta\theta}$$
$$= 4\,!\ E^2 g \qquad \text{d'après (35,32).}$$

Il en résulte que E^2g est un invariant :

$$E^2g = E'^2g' = E^2J^2g' \quad \text{d'après (35,5)} \qquad (35,6)$$

ce qui démontre d'une autre manière que :

$$g = J^2g' \qquad (35,7)$$

36. Densité tensorielle.

Désignons par $d\tau$ l'élément de « volume » [1] $dx_1dx_2dx_3dx_4$;

[1] M. Langevin, dans ses leçons sur la Relativité au Collège de France (1921), fait usage de la nomenclature suivante : une portion finie ou infinie de la multiplicité à quatre dimensions qui constitue notre Univers, est appelée un « domaine d'Univers »; les multiplicités à trois, deux ou une dimensions, qui y sont contenues sont respectivement des « volumes, surfaces ou lignes d'Univers ».

(*Note du Trad.*).

la formule connue du changement de variables des intégrales multiples donne pour un volume infiniment petit :

$$d\tau' = \mathrm{J}d\tau \qquad (36,1)$$

$$= \sqrt{\frac{g}{g'}}\, d\tau \qquad \text{d'après } (35,7)$$

de sorte que :

$$\sqrt{-g'}\, d\tau' = \sqrt{-g}\, d\tau\,; \qquad (36,2)$$

$\sqrt{-g}\, d\tau$ est donc un invariant pour l'intégration de volume. Nous ne devons pas oublier que (36,1) a un sens un peu spécial et que le signe « = » signifie « est remplaçable sous le signe somme par ».

Si nous comparons (36,2) et (35,6) nous voyons que $d\tau$ se comporte dans la transformation comme E ; $d\tau$ peut donc être regardé comme un tenseur symétrique gauche du quatrième ordre.

Pour donner de l'invariant $\sqrt{-g}\, d\tau$ l'interprétation la plus simple, choisissons des coordonnées galiléennes au point considéré :

$$\sqrt{-g}\, d\tau = dx\, dy\, dz\, dt.$$

Pour un observateur au repos par rapport à ces coordonnées, $dx\, dy\, dz$ est son élément de volume à trois dimensions $d\mathrm{V}$, et dt son temps propre ds ; donc dans une intégration de volume :

$$\sqrt{-g}\, d\tau = d\mathrm{V} ds.$$

Pour tout tenseur $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ faisant partie d'un champ tensoriel, l'intégrale :

$$\int \mathrm{T}_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d\tau \qquad (36,3)$$

prise entre des limites définies d'une manière absolue, sera elle-même un tenseur à cause de l'invariance de $\sqrt{-g}\, d\tau$. Chaque maille du système de coordonnées $(dx_1 = dx_2 = dx_3 = dx_4 = 1)$ fournit un élément $\mathrm{T}_{\mu\nu}\sqrt{-g}$ de ce tenseur. C'est la raison pour laquelle l'expression $\mathrm{T}_{\mu\nu}\sqrt{-g}$ a reçu le nom de *densité tenso-*

rielle ; c'est là évidemment la généralisation correcte du terme *densité* ; notre unité de volume doit être la maille dont les arêtes ont des « longueurs » unités par rapport aux coordonnées dont on se sert réellement. Il se peut que parfois nous préférions prendre comme étalon le volume exprimé en coordonnées galiléennes, mais cette préférence absolument arbitraire a pour effet de jeter la confusion au milieu de nos coordonnées.

La densité tensorielle s'obtient toujours en multipliant le tenseur par $\sqrt{-g}$.

Dans la théorie que nous allons exposer, les densités tensorielles sont plus importantes que les tenseurs eux-mêmes. Souvent, dans nos formules, nous rencontrerons le facteur $\sqrt{-g}$; il nous indiquera que leur signification physique se rapporte plutôt à la densité tensorielle qu'au tenseur.

Dans tout espace, il est toujours possible de choisir les coordonnées de façon qu'en tous points $\sqrt{-g} = 1$; si en effet trois des familles de surfaces coordonnées ont été menées d'une manière arbitraire, on peut toujours tracer la quatrième de façon à définir des mailles ayant toutes le même volume. Avec ce choix de coordonnées, tenseurs et densités tensorielles deviennent équivalents et le calcul s'en trouve bien souvent très simplifié ; cependant cette particularisation nuit à la clarté du sens général.

37. Divergence d'un tenseur.

Dans la théorie élémentaire des vecteurs, la divergence :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

est une quantité importante qu'il nous est possible d'interpréter géométriquement. Dans notre notation symbolique cette expression prend la forme :

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}.$$

Evidemment si nous voulons généraliser, il nous faut prendre les dérivées *covariantes* ; d'où l'invariant :

$$A^{\mu}_{\mu}.$$

La divergence correspond donc à la dérivée covariante contractée.

D'après (21,2) :

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{\mu} &= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}} + \{\varepsilon\mu, \mu\} A^{\varepsilon} \\ &= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}} + A^{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_{\varepsilon}} \log \sqrt{-g} \qquad \text{d'après } (26,4) \\ &= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}} + A^{\mu} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \sqrt{-g} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(A^{\mu} \sqrt{-g}\right). \qquad (37,1) \end{aligned}$$

Si nous désignons les densités tensorielles par les lettres de ronde correspondantes, ceci peut s'écrire :

$$\mathfrak{A}^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \mathfrak{A}^{\mu}. \qquad (37,2)$$

De même la divergence d'un tenseur mixte est :

$$A^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} A^{\nu}_{\mu} + \{\alpha\nu, \nu\} A^{\alpha}_{\mu} - \{\mu\nu, \alpha\} A^{\nu}_{\alpha}, \quad \text{d'après } (23,2).$$

Les deux premiers termes se réduisent comme précédemment à :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(A^{\nu}_{\mu} \sqrt{-g}\right).$$

Le troisième terme donne :

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}\right) g^{\alpha\beta} A^{\nu}_{\alpha}.$$

Quand $A^{\beta\nu}$ est un tenseur *symétrique*, deux des termes de la parenthèse disparaissent dans la sommation, et il reste :

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} A^{\nu\beta}.$$

Ainsi :

$$A^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(A^{\nu}_{\mu} \sqrt{-g}\right) - \frac{1}{2} A^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}, \qquad (37,3)$$

ou d'après (26,2) :

$$A^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(A^{\nu}_{\mu} \sqrt{-g}\right) + \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \qquad (37,4)$$

La divergence d'un tenseur contrevariant est :

$$A^{\mu\nu}_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(A^{\mu\nu} \sqrt{-g}\right) + \{\alpha\nu, \mu\} A^{\alpha\nu}. \qquad (37,5)$$

Pour un tenseur *symétrique gauche* le dernier terme disparaît, et :

$$A^{\mu\nu}_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(A^{\mu\nu} \sqrt{-g}\right). \qquad (37,6)$$

En introduisant la densité tensorielle nous avons les formules relativement simples :

$$\mathfrak{A}^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathfrak{A}^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} \mathfrak{A}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \text{ (tenseurs symétriques)}, \qquad (37,7)$$

$$\mathfrak{A}^{\mu\nu}_{\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathfrak{A}^{\mu\nu} \qquad \text{(tenseurs symétriques gauches)}. \qquad (37,8)$$

38. Les quatre identités.

Nous allons maintenant démontrer le théorème fondamental de la mécanique.

La divergence de $G^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} G$ *est identiquement nulle.* (38)

Comme en hydrodynamique, annuler la divergence, c'est écrire la condition de *continuité* du flux. Si nous tenons compte du fait que nous avons ajouté une coordonnée de temps, c'est la condition de *conservation* ou de *permanence* que l'on obtient. Nous verrons combien il est important pour une théorie d'un Univers matériel de trouver un tenseur d'Univers qui, par sa nature même, soit permanent.

Il serait possible, je crois, de donner une démonstration géométrique du théorème en reprenant et en développant les idées

exposées au § 24 ; malheureusement je n'ai pas réussi à donner au tenseur $G_{\mu\nu}$ une signification claire, et je dois me contenter de faire de cette proposition une vulgaire vérification analytique.

Comme g^{ν}_{μ} se comporte comme une constante dans la différentiation covariante,

$$\left(g^{\nu}_{\mu}G\right)_{\nu} = g^{\nu}_{\mu}\frac{\partial G}{\partial x_{\nu}} = \frac{\partial G}{\partial x_{\mu}}.$$

Nous devons donc vérifier que :

$$G^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x_{\mu}} \quad ; \tag{38,1}$$

en faisant successivement $\mu = 1, 2, 3, 4$, on obtient les quatre identités dont nous avons signalé l'existence au Chapitre IX. D'après (37,4) :

$$G^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\left(G^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g}\right) + \frac{1}{2}G_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}}.$$

Comme $G = g^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x_{\mu}} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} + \frac{1}{2}G_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}}.$$

Nous avons donc à démontrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\left(G^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g}\right) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}}. \tag{38,2}$$

Choisissons maintenant nos coordonnées de telle sorte que :

(*a*) $\sqrt{-g} = 1$ *en tout point* ;

(*b*) les dérivées premières $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$ s'annulent *au point considéré*.

Comme (38) est une équation tensorielle, il suffit de prouver qu'elle est vraie pour un système de coordonnées particulier ; elle sera alors vraie pour tous les systèmes de coordonnées que l'on pourra mener dans le genre d'espace-temps envisagé. Mais, comme nous voulons démontrer qu'elle est vraie universellement, nous devons avoir soin de choisir des coordonnées qui

ne particularisent en rien le genre d'espace-temps. Or, précisément, les conditions (*a*) et (*b*) peuvent être remplies dans n'importe quel genre d'espace-temps.

D'après (*a*) le premier membre de (38,2) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} G_\mu^\nu = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} G_\mu^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta} G_{\mu\beta}\right)$$

$$= g^{\alpha\beta} \frac{\partial G_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} \quad \text{à cause de } (b)$$

$$= g^{\alpha\beta} \frac{\partial G_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} \quad \text{en permutant } \alpha \text{ et } \beta.$$

On peut donc écrire (38,2) :

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial G_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right) = 0. \qquad (38,3)$$

Substituons à $G_{\mu\beta}$, etc., leurs valeurs tirées de (28,2) où l'on a supprimé les termes contenant $\log\sqrt{-g}$ en facteur, d'après (*a*). D'après (*b*) les symboles à trois indices s'annulent au point considéré mais leurs dérivées ne s'y annulent pas. Ainsi le premier terme seul subsiste dans (28,2) quand on fait la substitution dans (38,3) et cette dernière expression devient :

$$-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\varepsilon}\{\mu\beta, \varepsilon\} + \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\varepsilon}\{\mu\alpha, \varepsilon\} - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\varepsilon}\{\alpha\beta, \varepsilon\}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\varepsilon}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\varepsilon}\left(\frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\gamma}\right)\right.$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\varepsilon}\left(\frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma}\right)$$

$$\left. - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\varepsilon}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right)\right],$$

car on voit que, à cause de (*b*), $g^{\gamma\varepsilon}$ se comporte comme une constante à l'égard de la double différentiation.

Huit des neuf termes du crochet se détruisent deux à deux soit directement, soit après changement d'indices muets ; finalement, il ne reste que le dernier terme :

$$-\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\varepsilon} \frac{\partial^3 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\varepsilon \partial x_\gamma}$$

$$= -\frac{1}{4} g^{\gamma\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial x_\varepsilon \partial x_\gamma} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right) \quad \text{d'après } (b)$$

$$= -\frac{1}{4} g^{\gamma\varepsilon} \frac{\partial^3 (\log g)}{\partial x_\varepsilon \partial x_\gamma \partial x_\mu} \quad \text{d'après } (26,3)$$

$$= 0$$

puisque $g = -1$ en tout point. Le théorème se trouve donc démontré.

39. Le tenseur d'énergie matériel.

Soit ρ_0 la densité rapportée à un système de coordonnées galiléennes attaché à la matière et emporté dans son mouvement ; nous appellerons ρ_0 la « densité propre » ; c'est un invariant caractéristique de la matière. Soit $\frac{dx_\mu}{ds}$ la vitesse de la matière dans un système de coordonnées quelconque ; posons :

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}, \qquad (39,1)$$

le deuxième membre étant manifestement un tenseur contrevariant.

En coordonnées galiléennes (se déplaçant avec une vitesse quelconque), la densité coordonnée ρ est donnée par :

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2, \qquad (39,15)$$

le facteur de contraction de Fitzgerald $\frac{dt}{ds}$ s'introduisant de deux manières différentes : une fois par suite du changement de la masse avec la vitesse, et une deuxième fois à cause de la contraction du volume (p. 180).

Par suite, en coordonnées galiléennes :

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{dt} \frac{dx_\nu}{dt}. \qquad (39,2)$$

Si u, v, w sont les composantes de la vitesse de la matière, ce tenseur se développe comme il suit :

$$T^{\mu\nu} = \begin{matrix} \rho u^2, & \rho uv, & \rho uw, & \rho u, \\ \rho vu, & \rho v^2, & \rho vw, & \rho v, \\ \rho wu, & \rho wv, & \rho w^2, & \rho w, \\ \rho u, & \rho v, & \rho w, & \rho. \end{matrix} \qquad (39,3)$$

(Indices : $\to \mu$, $\downarrow \nu$.)

La matière possédant une structure atomique, un volume que l'on peut regarder comme petit dans un raisonnement macroscopique, contient des particules dont les vitesses ont des orientations extrêmement différentes ; chacun des éléments de (39,3) devrait donc être sommé pour tous ces différents mouvements. Ou bien alors nous pouvons diviser le tenseur en deux parties, une première se rapportant au mouvement moyen, c'est-à-dire au mouvement d'ensemble de la matière — cette vitesse d'ensemble étant u, v, w —, la seconde aux mouvements internes par rapport au centre d'inertie et de composantes u_1, v_1, w_1 [1]. Les termes rectangles s'annulent puisque les vitesse internes sont relatives au centre d'inertie. $\sum \rho u_1 v_1$ représente la quantité de mouvement parallèle à u qui traverse par unité de temps l'unité d'aire normale à l'axe y ; cette expression est donc égale à la tension interne p_{xy}. Nous devons donc ajouter à (39,3) le tenseur ayant pour éléments les tensions internes et bordé de zéros selon sa dernière ligne et sa dernière colonne.

Il est plus commode d'introduire le tenseur mixte associé [2] :

$$T_\mu^\nu = \begin{matrix} -p_{xx}-\rho u^2, & -p_{xy}-\rho uv, & -p_{xz}-\rho uw, & \rho u, \\ -p_{xy}-\rho uv, & -p_{yy}-\rho v^2, & -p_{yz}-\rho vw, & \rho v, \\ -p_{xz}-\rho uv, & -p_{yz}-\rho vw, & -p_{zz}-\rho w^2, & \rho w, \\ -\rho u, & -\rho v, & -\rho w, & \rho. \end{matrix} \qquad (39,4)$$

(Indices : $\to \mu$, $\downarrow \nu$.)

Cette collection assez variée de quantités physiques associées à un fragment de matière, est ce que l'on appelle son tenseur d'énergie.

(1) Au sens de la mécanique ordinaire, cette vitesse interne par rapport au centre d'inertie est la différence géométrique entre la vitesse vraie au point considéré et la vitesse d'ensemble.

(2) Par exemple $T_2^{\ 1} = g_{2\nu}T^{1\nu} = 0 - T^{12} + 0 + 0$, pour des valeurs galiléennes des $g_{\mu\nu}$.

Considérons les équations :

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T^\nu_\mu = 0. \tag{39,5}$$

Prenons μ égal à 4 ; il vient d'après (39,4) :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{39,6}$$

qui n'est autre que l'équation de continuité en hydrodynamique. En prenant maintenant $\mu = 1$, nous obtenons :

$$-\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right) = \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}$$
$$= \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

en tenant compte de (39,6) qui annule les autres termes :

$$= \rho\frac{Du}{Dt} \tag{39,7}$$

où $\frac{Du}{Dt}$ est l'accélération de la matière.

C'est l'équation bien connue du mouvement d'un fluide non soumis à l'action d'un champ de force. Les équations (39,5) sont donc équivalentes aux équations habituelles de l'hydrodynamique (ou à celles de la théorie des gaz), équations qui expriment la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. En fait $\frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x_\nu}$ exprime la variation changée de signe de la quantié de mouvement et la variation de la masse.

Quand il y a un champ de force, on introduit les composantes de la force sur l'unité de volume ρX, ρY, ρZ, et les équations hydrodynamiques prennent alors la forme :

$$\frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x_\nu} = -(\rho X, \rho Y, \rho Z, 0). \tag{39,8}$$

40. La loi de gravitation dans la matière continue.

En coordonnées galiléennes, le champ de force disparaît, de sorte que :

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0$$

symbolise rigoureusement les équations habituelles de l'hydrodynamique en coordonnées galiléennes. C'est évidemment là le cas particulier de l'équation tensorielle générale :

$$T_{\mu\nu}^{\nu} = 0 \qquad (40,1)$$

qui exprime que la divergence du tenseur d'énergie est nulle.

Dans l'hypothèse où l'énergie, les tensions et les quantités de mouvement sont des propriétés de l'espace-temps et non des caractères relatifs à quelque substance, le tenseur d'énergie doit être regardé comme un tenseur d'Univers, c'est-à-dire un des termes de la série des tenseurs fondamentaux que l'on peut faire dériver des $g_{\mu\nu}$. Le fait qu'il a une divergence nulle nous conduit à l'identifier avec le tenseur $G_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} G$ qui, nous l'avons vu au § 38, possède la même propriété.

En conséquence nous posons :

$$G_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} G = -8\pi T_{\mu}^{\nu} \quad . \qquad (40,2)$$

le facteur 8π étant introduit, comme nous le verrons plus loin (§ 43) pour rendre cohérentes les unités employées.

Contractons (40,2) en y faisant $\nu = \mu$; comme $g_{\mu}^{\mu} = 4$, nous obtenons :

$$G = 8\pi T. \qquad (40,3)$$

Une forme équivalente de (40,2) est donc :

$$G_{\mu}^{\nu} = -8\pi \left(T_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} T \right). \qquad (40,4)$$

C'est la loi de gravitation dans la matière continue ; elle relie les potentiels des champs de force à la densité et autres propriétés mesurables de la matière présente. Elle correspond à l'équation $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ de la théorie newtonienne. Nous ne la regardons pas ici comme une loi de la nature, mais comme

une définition de la signification que nous attribuons à la masse, à la quantité de mouvement, aux tensions, etc., dans notre description géométrique de l'Univers. L'identification a été faite de telle sorte que l'équation (40,1) soit satisfaite et que, par conséquent, les lois de l'hydrodynamique et de la théorie des gaz soient également vérifiées.

De plus, là où il n'y a pas de tenseur d'énergie $G_\mu^\nu = 0$, d'après (40,4). Ceci donne $G_{\mu\nu} = 0$ pour un espace vide ; c'est ce que nous avions admis dans la Section III.

Le scalaire
$$\begin{aligned} T &= g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \\ &= \rho_0 g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \qquad \text{d'après (39,1)} \\ &= \rho_0, \end{aligned}$$

de sorte que :

$$G = 8\pi T = 8\pi\rho_0. \tag{40,5}$$

L'invariant d'Univers G est ce que l'on appelle la courbure de Gauss, ou plus simplement la courbure. Pour comprendre sa signification géométrique, considérons une surface tracée dans un espace euclidien à cinq dimensions, surface dont nous rapportons l'équation aux lignes de courbure passant par un de ses points et à la normale en ce point. Cette équation est de la forme :

$$2z = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2 + k_4x_4^2 + \text{termes de puissances supérieures},$$

où k_1, k_2, k_3, k_4 sont les inverses des rayons de courbure principaux. Nous avons [1] :

$$\begin{aligned} -ds^2 &= dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \\ &= (1 + k_1^2x_1^2)\, dx_1^2 + \ldots + 2k_1k_2x_1x_2dx_1dx_2 + \ldots \end{aligned}$$

Au moyen de cette expression nous pouvons facilement cal-

[1] Le signe moins de ds^2 provient de ce que nous regardons x_1, x_2, x_3, x_4, z, comme des coordonnées d'espace.

culer les symboles à trois indices, etc., de là déterminer $G_{\mu\nu}$ puis G. Le résultat est :

$$G = 2(k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4). \quad (40,6)$$

Dans le cas de trois dimensions où il n'y a que deux rayons de courbure, le produit $k_1\ k_2$ est connu sous le nom de courbure totale ou courbure de Gauss. L'invariant G n'est autre qu'une généralisation de ce cas particulier.

Si par exemple, nous avons un espace sphérique de rayon R, le temps étant supposé rectiligne, c'est-à-dire à courbure nulle,

$$G = \frac{6}{R^2}.$$

Ce résultat ajouté à l'équation (40,5) donne la relation entre le rayon de courbure de l'espace et la densité de la matière. Jusqu'ici, nous n'avons pas spécifié les unités dont nous devons nous servir dans la mesure de ρ_0 ; au § 43 nous montrerons que ce sont les unités gravitationnelles que l'on doit employer à cet effet (c'est-à-dire un système d'unités où la constante de gravitation et la vitesse de la lumière sont toutes les deux égales à l'unité).

Einstein et de Sitter obtiennent un Univers courbe et fini en prenant à la place de (40,2) :

$$G_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu}(G - 2\lambda) = -8\pi T_{\mu}^{\nu}, \quad (40,7)$$

où λ est une constante; cette modification n'empêche pas la divergence du premier membre d'être nulle; par suite, les lois de conservation restent encore vérifiées.

41. La force.

D'après § 37 :

$$T_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(T_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g}\right) - \{\mu\nu, \alpha\} T_{\alpha}^{\nu}.$$

Choisissons les coordonnées de telle sorte que $\sqrt{-g} = 1$ [1], (40,1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T_\mu^\nu = \{\mu\nu, \alpha\} \ T_\alpha^\nu .$$

Dans la plupart des applications, la vitesse de la matière n'est qu'une faible fraction de la vitesse de la lumière de sorte que, dans le deuxième membre de la dernière équation, la composante T_4^4 est très grande par rapport aux autres composantes de T_α^ν. D'où, approximativement :

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T_\mu^\nu = \{\mu 4, 4\} \ T_4^4 = \{\mu 4, 4\} \ \rho. \qquad (41,1)$$

En comparant avec (39,8) nous voyons que :

$$-X, -Y, -Z = \{14,4\}, \{24,4\}, \{34,4\}.$$

Les symboles à trois indices peuvent donc s'interpréter comme les composantes d'une force. Les trois forces dont nous venons de parler, ce sont les forces principales proportionnelles à la masse ou à l'énergie ; mais il en existe d'autres que néglige la mécanique newtonienne, et qui sont produites par la quantité de mouvement et les tensions formant les autres composantes du tenseur d'énergie.

Nous pouvons nous servir de l'autre forme (37,3) de $T_{\mu\nu}^\nu$, qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T_\mu^\nu = \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} . \qquad (41,2)$$

$$= \frac{1}{2} \rho \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\mu}, \text{ approximativement.}$$

Donc :

$$X, Y, Z = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x}, \ -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial y}, \ -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial z} . \qquad (41,3)$$

[1] On peut éviter cette limitation en regardant la densité, les tensions, les quantités de mouvements, etc., comme définissant une densité tensorielle et non un tenseur.

En particulier si X, Y, Z dérivent d'un potentiel Ω, la solution de (41,3) est :

$$\Omega = -\frac{1}{2} g_{44} + C^{te}.$$

On peut appliquer ces considérations au calcul de l'élément linéaire dans un champ de force centrifuge (9,4), le potentiel de la force centrifuge étant $\Omega = \frac{1}{2} \omega^2 (x'^2 + y'^2)$.

En choisissant les coordonnées de façon qu'à l'infini $\Omega = 0$ et $g_{44} = 1$,

$$g_{44} = 1 - 2\Omega. \qquad (41,4)$$

Comme cas particulier on peut supposer le champ dû à une particule de masse gravitationnelle m à une distance r :

$$g_{44} = 1 - \frac{2m}{r}$$

comme en (29,8).

42. Dynamique du point matériel.

En faisant passer en haut l'indice μ, nous pouvons écrire l'équation $T^{\nu}_{\mu\nu} = 0$ sous la forme équivalente $T^{\mu\nu}_{\nu} = 0$; puis, d'après (37,5) :

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) = -\{\alpha\nu, \mu\}\, T^{\alpha\nu}\sqrt{-g}.$$

Intégrons cette équation pour un « volume » très petit à quatre dimensions. On peut effectuer immédiatement une première intégration sur le premier membre et écrire :

$$\left[\iiint T^{\mu 1}\sqrt{-g}\, dx_2 dx_3 dx_4 + \iiint T^{\mu 2}\sqrt{-g}\, dx_1 dx_3 dx_4 + \ldots + \ldots\right]$$

$$= -\iiiint \{\alpha\beta, \mu\}\, T^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\, d\tau. \qquad (42,1)$$

Supposons que dans le volume d'intégration il n'y ait qu'une simple particule et que par suite le tenseur d'énergie soit nul en tout point de ce volume, sauf sur une certaine ligne — la ligne d'Univers de la particule [1].

Or d'après (39,1) :

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds},$$

et d'après (36,3) :

$$\int\int\int\int \rho_0 \sqrt{-g}\, d\tau = \int\int\int\int \rho_0 dV ds$$
$$= mds,$$

où ds est la longueur généralisée de l'arc de ligne d'Univers contenu à l'intérieur du domaine d'intégration, et $m = \int\int\int \rho_0 dV$ la masse calculée en partant de la densité et du volume mesurés par un observateur fixe par rapport à la particule, c'est-à-dire la masse au repos ou « masse propre » de cette particule.

Si le domaine d'intégration est très petit, le deuxième membre de (42,1) devient :

$$-\{\alpha\beta, \mu\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} .mds. \qquad (42,2)$$

Au premier membre, les intégrales triples étendues à la multiplicité à trois dimensions limitant le volume à quatre dimensions, s'annulent partout sauf aux deux points où la ligne d'Univers de la particule coupe cette multiplicité. Pour simplifier, prenons, au voisinage de chacun de ces points d'intersection, pour « surface » limitant notre volume, un continuum de la forme $x_1 = C^{te}$, de sorte que des quatre intégrales triples, il ne reste que la première. Le premier membre de (42,1) devient donc l'expression :

[1] Rigoureusement, cette ligne d'Univers est plutôt une sorte de filament quadridimensionnel dont les sections tridimensionnelles d'espace ne sont pas nulles, puisque la particule, si petite soit-elle, a un volume que nous ne saurions négliger.

(Note du Trad.).

$$\left[\frac{dx_\mu}{ds}\ \frac{dx_1}{ds}\iiint \rho_0 \sqrt{-g}\, dx_2 dx_3 dx_4\right] \qquad (42,3)$$

dont il faut prendre la différence des valeurs pour les deux « surfaces » limites.

Dans chaque élément d'intégration nous pouvons remplacer :

$$\sqrt{-g}\,\frac{dx_1}{ds}\,dx_2dx_3dx_4 \quad \text{par} \quad \frac{dV\,ds}{ds} = dV \quad \text{d'après (36,3).}$$

Donc (42,3) devient :

$$\left[m\,\frac{dx_\mu}{ds}\right].$$

Le crochet indiquant que l'on doit prendre la différence des valeurs prises par la quantité qu'il contient aux deux limites, l'expression précédente peut s'écrire :

$$\frac{d}{ds}\left(m\,\frac{dx_\mu}{ds}\right)ds, \qquad (42,4)$$

où ds est comme en (42,2) la longueur généralisée de l'arc de ligne d'Univers compris entre les deux limites.

Notre équation (42,1) devient donc :

$$\frac{d}{ds}\left(m\,\frac{dx_\mu}{ds}\right) + m\,\{\alpha\beta,\,\mu\}\,\frac{dx_\alpha}{ds}\,\frac{dx_\beta}{ds} = 0, \qquad (42,5)$$

formule qui donne le taux de variation de la quantité de mouvement et de la masse (ou énergie) de la particule.

De (42,5) on peut encore déduire :

$$\begin{aligned} mg_{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\,\frac{d}{ds}\left(m\,\frac{dx_\mu}{ds}\right) &= -\,m^2 g_{\mu\nu}\,\{\alpha\beta,\,\mu\}\,\frac{dx_\nu}{ds}\,\frac{dx_\alpha}{ds}\,\frac{dx_\beta}{ds} \\ &= -\,m^2\,[\alpha\beta,\,\nu]\,\frac{dx_\nu}{ds}\,\frac{dx_\alpha}{ds}\,\frac{dx_\beta}{ds} \\ &= -\,\frac{1}{2}\,m^2\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\,\frac{dx_\nu}{ds}\,\frac{dx_\alpha}{ds}\,\frac{dx_\beta}{ds} \\ &= -\,\frac{1}{2}\,m^2\,\frac{dg_{\alpha\beta}}{ds}\,\frac{dx_\alpha}{ds}\,\frac{dx_\beta}{ds} \\ &= -\,\frac{1}{2}\,m^2\,\frac{dg_{\mu\nu}}{ds}\,\frac{dx_\mu}{ds}\,\frac{dx_\nu}{ds}\,. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre à cette équation la même équation où l'on a permuté μ et ν, on obtient :

$$g_{\mu\nu} m \frac{dx_\nu}{ds} \frac{d}{ds}\left(m \frac{dx_\mu}{ds}\right) + g_{\mu\nu} m \frac{dx_\mu}{ds} \frac{d}{ds}\left(m \frac{dx_\nu}{ds}\right) + m^2 \frac{dg_{\mu\nu}}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0,$$

ce qui donne :

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} . m^2\right) = 0.$$

Mais :

$$g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 1 ;$$

d'où l'équation :

$$\frac{dm^2}{ds} = 0, \qquad (42,6)$$

qui nous montre que la masse au repos d'une particule est constante ; les équations (42,5) se réduisent maintenant aux équations (20,4) d'une géodésique.

La loi d'après laquelle un point matériel libre a pour trajectoire une géodésique et pour masse au repos une constante, apparaît donc comme une conséquence de la loi de gravitation (40,2), et non comme une hypothèse indépendante. On peut remarquer également que, tandis qu'au § 29 nous avons dû attribuer des propriétés symétriques à la particule, nous avons fait ici la seule hypothèse que le volume occupé était petit.

43. Identité de la masse gravitationnelle et de la masse d'inertie.

L'expression « masse gravitationnelle » peut avoir deux sens différents suivant qu'on l'applique (*a*) à la façon dont une particule répond au champ de gravitation qui la sollicite, (*b*) à la propriété que possède cette particule de créer elle-même un champ de gravitation. L'identité de la masse gravitationnelle prise dans son sens (*a*) et de l'inertie est, dans cette théorie, considérée comme un axiome puisqu'on ne peut faire aucune

distinction entre un champ de gravitation et un champ d'inertie. Aussi nous sommes-nous servis de l'expression avec son sens (*b*) quand nous avons montré, par exemple, que la constante d'intégration m des §§ 29-31 représentait la masse gravitationnelle. La masse qui intervient dans la signification physique du tenseur d'énergie T_μ^ν est la masse d'inertie, définie par la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. La connexion entre la masse gravitationnelle et la masse d'inertie est faite par la loi de gravitation (40,2) où le coefficient de proportionnalité, actuellement choisi d'une manière arbitraire égal à 8π, correspond à la constante newtonienne de gravitation.

La proportionnalité de la masse gravitationnelle et de la masse d'inertie, et la « constante de gravitation » qui les unit, sont des conceptions appartenant à la théorie approchée de Newton ; elles supposent, par conséquent, que les champs de gravitation sont assez faibles pour que les équations deviennent linéaires. Pour des champs plus intenses, la terminologie newtonienne devient ambiguë et il est inutile de se demander si la constante de gravitation est réellement une *constante*, si grande que soit la masse. Aussi examinerons-nous ici le cas limite de champs extrêmement faibles. Posons :

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

où $\delta_{\mu\nu}$ sont les valeurs galiléennes et $h_{\mu\nu}$ des quantités très petites dont les carrés seront négligés. Avec ce degré d'approximation :

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\mu\nu, \alpha\} + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \log \sqrt{-g}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\delta^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial h_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial h_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x\beta}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\right)$$

en tenant compte de (26,3),

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_\mu^\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_\nu^\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} + \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \qquad (43,1)$$

puisque $h_\mu^\alpha = g^{\alpha\beta} h_{\mu\beta} = \delta^{\alpha\beta} h_{\mu\beta}$ au degré d'approximation admis.

Voyons s'il est possible de choisir des coordonnées telles que :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} h^\alpha_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x_\mu}. \tag{43,2}$$

Avec cette hypothèse (43,1) se réduit à :

$$\frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

$$= \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}, \qquad \text{d'après (23,65).}$$

Nous avons donc :

$$\square h_{\mu\nu} = 2G_{\mu\nu}, \tag{43,3}$$

avec la condition (43,2).

Comme les $\delta^{\mu\nu}$ sont des constantes,

$$\square \left(h^\alpha_\mu - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\mu h\right) = 2 \left(G^\alpha_\mu - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\mu G\right).$$

D'où :

$$\square \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} h^\alpha_\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x_\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \square \left(h^\alpha_\mu - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\mu h\right)$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(G^\alpha_\mu - \frac{1}{2} g^\alpha_\mu G\right)$$

$$= -16\pi \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(T^\alpha_\mu\right) = 0,$$

(39,5) étant applicable avec notre degré d'approximation. Ainsi, le choix de coordonnées satisfaisant à la condition (43,2) est compatible avec le résultat (43,3).

Dans une région vide de matière (43,3) devient :

$$\square h_{\mu\nu} = 0$$

équation qui nous montre que la perturbation du potentiel de gravitation se propage avec la vitesse-unité (§ 23), si toutefois nous ne tenons pas compte de l'effet de la perturbation sur sa propre vitesse de propagation. La gravitation se propage donc avec la vitesse de la lumière. Si dans les calculs précédents nous n'avions pas négligé les carrés des $h_{\mu\nu}$, nous aurions trouvé que

la vitesse de propagation exprimée en fonction des coordonnées subit les mêmes écarts par rapport à l'unité que la vitesse de la lumière dans les mêmes conditions. Pour rendre évidente cette propagation, il nous a fallu particulariser convenablement les coordonnées — condition (43,2) — puisque, dans un choix arbitraire des coordonnées, nous n'avons pas à nous conformer à quelque condition de « propagation » du système choisi [1].

Pour un champ statique, (43,3) devient :

$$\Delta h_{\mu\nu} = 2G_{\mu\nu}$$
$$= -16\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \qquad \text{d'après (40,4).}$$

Pour la matière au repos $T = T_{44} = \rho$ (densité d'*inertie*) et les autres composantes sont nulles ; par suite :

$$\Delta\,(h_{11}, h_{22}, h_{33}, h_{44}) = 8\pi\rho\,(1, 1, 1, 1),$$

ce qui est une généralisation de l'équation de Poisson. Dans le cas d'une particule unique, on sait que la solution de ces équations est :

$$h_{11}, h_{22}, h_{33}, h_{44} = -\frac{2m}{r}.$$

L'élément linéaire est donc, d'après (43,0),

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2m}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2, \quad (43,4)$$

résultat déjà trouvé en (34,1). La raison pour laquelle nous avons voulu établir de nouveau cette formule, c'est que, ici, m est la masse d'*inertie* et non plus simplement une constante

[1] Le potentiel de gravitation $g_{\mu\nu}$ est une *relation* entre l'Univers extérieur et un système de coordonnées ; il est clair que, en général, une telle relation n'obéit à aucune condition de propagation, puisqu'un des facteurs de cette relation (le système de coordonnées) peut être choisi au hasard. Le fait que, pour des coordonnées convenablement choisies, la gravitation se propage avec la vitesse de la lumière, ne doit pas être regardé comme l'expression d'une propriété absolue de la gravitation ; ce n'est qu'une manière commode de décrire la façon dont nous apparaîtront les phénomènes dans notre étude relative de l'Univers.

d'intégration. Or nous avons déjà montré que l'on était conduit à identifier le m de (43,4) avec la masse *gravitationnelle* de Newton ; il en résulte l'égalité de la masse d'*inertie* et de la masse *gravitationnelle,* et le choix de la constante 8π dans (40,2) se trouve maintenant justifié.

44. Action.

L'intégrale invariante :

$$A = \int \rho_0 \sqrt{-g}\, d\tau \tag{44,1}$$

représente l'action dans une région à quatre dimensions.

D'après (36,3) :

$$\begin{aligned} A &= \int\int\int\int \rho_0 dV ds \\ &= \int\int dm ds, \end{aligned} \tag{44,2}$$

m étant la masse au repos (ou l'*énergie propre*).

L'action d'une particule d'énergie propre m pendant un temps propre ds est donc mds, comme le veut la définition mécanique ordinaire. Si l'on tient compte de (40,5), une autre forme de l'action est la suivante :

$$A = \frac{1}{8\pi} \int G \sqrt{-g}\, d\tau. \tag{44,3}$$

En laissant de côté le facteur numérique, $G\sqrt{-g}$ ou $\mathcal{G}$ est la densité d'action du champ de gravitation. Remarquons que l'action matérielle et l'action gravitationnelle sont deux aspects de la même entité ; ce serait une faute de les ajouter pour avoir une action totale.

Cherchons maintenant sous quelles conditions l'action dans un certain domaine est stationnaire, c'est-à-dire :

$$\delta(8\pi A) = \int \delta(G\sqrt{-g}) d\tau = 0 \tag{44,4}$$

pour des variations très petites et arbitraires des $g_{\mu\nu}$, variations qui s'annulent à la « surface » et près [1] de la « surface » limitant la région considérée. Deux genres de variations sont possibles. Si l'on fait varier les $g_{\mu\nu}$ simplement par des changements de coordonnées, (44,4) est satisfaite automatiquement, puisque A est un invariant ; la condition précédente ne fait alors qu'exprimer une propriété d'invariance et ce n'est plus une condition d'intégrale stationnaire. Au contraire, dans le cas général où les $\delta g_{\mu\nu}$ sont quelconques, le genre d'espace-temps variera lui-même ; d'après (40,2) cette variation sera interprétée comme une modification de la densité et du mouvement de la matière présente. C'est à cette variation que se rapporte le Principe de l'Action Stationnaire en mécanique.

Soit [2] $\mathfrak{L} = g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\left(\{\mu\alpha, \beta\}\{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\}\{\alpha\beta, \beta\}\right)$

expression qui entre dans la constitution de $\mathfrak{G}$.

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{L} = &\{\mu\alpha, \beta\}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\{\nu\beta, \alpha\}\right) + \{\nu\beta, \alpha\}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\{\mu\alpha, \beta\}\right)\\ &- \{\mu\nu, \alpha\}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\{\alpha\beta, \beta\}\right) - \{\alpha\beta, \beta\}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\{\mu\nu, \alpha\}\right)\\ &- \left(\{\mu\alpha, \beta\}\{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\}\{\alpha\beta, \beta\}\right)\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right). \end{aligned} \tag{44,5}$$

Le premier terme dans (44,5) :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\{\mu\alpha, \beta\}\,\delta\left[\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} g^{\alpha\varepsilon}\left(\frac{\partial g_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\varepsilon}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\varepsilon}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\{\mu\alpha, \beta\}\,\delta\left(\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} g^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial g_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\beta}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\{\mu\alpha, \beta\}\,\delta\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\beta}\right) \qquad \text{d'après (26,11)}\\ &= -\frac{1}{2}\{\mu\nu, \alpha\}\,\delta\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \end{aligned}$$

Le deuxième terme se réduit à la même valeur.

(1) Afin que les variations des dérivées puissent s'annuler à la surface.

(2) L'analyse mathématique est assez compliquée ; le lecteur qui voudra bien admettre le résultat, peut passer directement à la formule (44,9).

Le troisième terme donne :

$$-\{\mu\nu, \alpha\}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}\right) \qquad \text{d'après (26,4).}$$

Au quatrième terme nous avons :

$$g^{\mu\nu}\{\mu\nu, \alpha\}\sqrt{-g} = -\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(g^{\alpha\nu}\sqrt{-g}\right)$$

d'après (37,5) puisque la dérivée covariante de $g^{\mu\nu}$ est nulle.
Le quatrième terme devient donc, après certains changements dans les indices muets :

$$\{\nu\beta, \beta\}\, g^{\alpha}_{\mu}\,\delta\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)\right].$$

En portant toutes ces valeurs dans (44,5), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{L} = {} & \left[-\{\mu\nu, \alpha\} + g^{\alpha}_{\mu}\{\nu\beta, \beta\}\right]\delta\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right]\right) \\ & -\left[\{\mu\alpha, \beta\}\{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\}\{\alpha\beta, \beta\}\right]\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right). \qquad (44,6)\end{aligned}$$

Ecrivons $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ à la place de $g^{\mu\nu}\sqrt{-g}$ et $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha}$ à la place de $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)$.

D'après (44,6), nous avons :

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}} = -\left[\{\mu\alpha, \beta\}\{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\}\{\alpha\beta, \beta\}\right] \qquad (44,71)$$

et

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha}} = \left[-\{\mu\nu, \alpha\} + g^{\alpha}_{\mu}\{\nu\beta, \beta\}\right]. \qquad (44,72)$$

La formule (28,1) s'écrit :

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\mathfrak{g}^{\mu\nu}}, \qquad (44,8)$$

équation dont la forme ressemble à celle des équations de Lagrange en dynamique.
Nous voyons aussi que :

$$G\sqrt{-g} = \mathfrak{G} = \mathfrak{L} + \mathfrak{g}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right)$$

$$= \mathfrak{L} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right).$$

Comme les symboles à trois indices sont des fonctions linéaires des quantités $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha$, $\mathfrak{L}$ est une forme quadratique de ces quantités. D'après les propriétés des fonctions homogènes on voit que :

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha} = 2\mathfrak{L}.$$

Ainsi :

$$\mathfrak{G} = -\mathfrak{L} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha}\right). \qquad (44,85)$$

Nous avons maintenant :

$$\delta \int \mathfrak{G} d\tau = -\delta \int \mathfrak{L} d\tau,$$

puisque dans l'intégration le dernier terme de (44,85) donne une intégrale de surface étendue à la « surface » limitant le volume à quatre dimensions et que sur cette surface les variations sont nulles ;

$$= -\int \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}} \delta \mathfrak{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha} \delta \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha\right) d\tau.$$

d'où en intégrant par parties le second terme :

$$= \int \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}\right) \delta \mathfrak{g}^{\mu\nu} d\tau$$

$$= \int G_{\mu\nu} \delta \mathfrak{g}^{\mu\nu} d\tau \qquad \text{d'après } (44,8)$$

$$= \int G_{\mu\nu}\, \delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) d\tau. \qquad (44,9)$$

Les variations $\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)$ sont indépendantes les unes des autres et sont toutes arbitraires ; il en résulte que la condition de l'action stationnaire est $G_{\mu\nu} = 0$; en d'autres termes l'espace doit être vide.

Que conclure de ce qui précède, sinon l'*inexactitude* du Principe général de la Moindre Action ? L'action ne peut être stationnaire que dans un espace vide, c'est-à-dire précisément là où elle n'existe pas (¹) !

Bien entendu, il ne peut être question ici de considérer ce principe comme inexact dans son application à la mécanique ordinaire et à l'électrodynamique. Seulement, l'essai qu'on a fait de le généraliser — de montrer que les états de l'Univers sont conditionnés par la propriété que possède une certaine quantité absolue de rester stationnaire — se montre maintenant condamné à un échec certain. Du reste, au Chapitre XII, nous avons pu voir clairement qu'il n'y avait pas place à l'heure actuelle pour une pareille loi d'Univers, car toutes les lois qui, en général, ont été déduites de la moindre action, apparaissent comme fondées sur de pures identifications et sont incapables de définir la configuration des événements de l'Univers extérieur à nous.

Néanmoins on peut modifier le principe de moindre action de telle manière qu'il prenne une signification. Dans l'Univers réel, l'espace-temps occupé par la matière (électrons) n'est qu'une fraction extrêmement faible de l'espace-temps vide. La moindre action est donc une tendance très générale — mais avec des exceptions ; et cette tendance n'a encore reçu aucune explication dans notre théorie. La théorie des quanta fait supposer que la loi rigoureuse de l'action est probablement non pas la loi de l'action stationnaire mais celle de sa variation discontinue ; sous cette forme modifiée il se peut que la loi soit

(¹) Comme la plupart des auteurs, H. Weyl fait un large emploi du Principe de Moindre Action ; sa conclusion finale ne semble pourtant pas différer beaucoup de la mienne (*Raum, Zeit, Materie* ; 3ᵉ édition, p. 261).

universelle. On admet en général que le principe de moindre action englobe la totalité des lois continues de la nature et c'est plutôt contraire à l'ordre habituel de nos idées de dire que la justification du principe (si toutefois il y en a une) doit reposer sur la structure réelle et discontinue de la matière.

45. Une propriété des invariants.

Soit H une fonction invariante quelconque des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées [1], de sorte que :

$$\int \mathrm{H}\sqrt{-g}\,d\tau \text{ est un invariant.} \tag{45,1}$$

En partant de l'expression analytique de H on peut mettre $\delta(\mathrm{H}\sqrt{-g})$ sous la forme d'une somme linéaire de termes en $\delta g_{\mu\nu}$, $\delta\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)$, $\delta\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)$ et contenant les variations de dérivées d'ordres plus élevés s'il y en a. Supposons les variations assez petites pour que l'on puisse négliger les produits des δ. En intégrant par parties on peut ramener l'expression à ne contenir que des termes en $\delta g_{\mu\nu}$ et des termes qui soient des dérivées exactes par rapport aux coordonnées.

Donc, si les variations s'annulent à la « surface » limitant la région,

$$\delta\int \mathrm{H}\sqrt{-g}\,d\tau = \int \mathrm{P}^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g_{\mu\nu}\,d\tau, \tag{45,2}$$

les dérivées exactes donnant des intégrales de surface étendues à la surface limite où les variations sont toutes nulles. Le coefficient $\mathrm{P}^{\mu\nu}\sqrt{-g}$ peut se calculer dès que l'expression H est connue.

Nous pouvons supposer $\mathrm{P}^{\mu\nu}$ symétrique en μ et ν ; en effet,

(1) Le raisonnement est applicable quel que soit le nombre de dimensions de l'espace d'intégration ; dans le cas général, il faudrait écrire $\sqrt{|g|}$ au lieu de $\sqrt{-g}$.

(*Note du Trad.*).

toute expression symétrique gauche n'aurait aucun sens puisque son produit intérieur par $\delta g_{\mu\nu}$ serait identiquement nul. De plus, à cause du choix arbitraire de $\delta g_{\mu\nu}$, $P^{\mu\nu}$ doit être un tenseur.

Considérons le cas dans lequel les $\delta g_{\mu\nu}$ proviennent des variations δx_μ des coordonnées sans altération du genre d'espace. (45,2) s'annule, non pas parce que nous supposons l'intégrale (45,1) stationnaire, mais par suite de l'invariance même de (45,1) ; seulement, les $\delta g_{\mu\nu}$ ne sont plus des variations indépendantes.

Comparons $g_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ d'après (15,22) :

$$g_{\mu\nu} = (g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}) \frac{\partial(x_\alpha + \delta x_\alpha)}{\partial x_\mu} \frac{\partial(x_\beta + \delta x_\beta)}{\partial x_\nu}$$

$$= (g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}) \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\nu} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial(\delta x_\beta)}{\partial x_\nu} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\nu} \frac{\partial(\delta x_\alpha)}{\partial x_\mu}.$$

Or $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu} = g_\mu^\alpha$ d'après (14,3). D'où :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\beta} \frac{\partial(\delta x_\beta)}{\partial x_\nu} + g_{\alpha\nu} \frac{\partial(\delta x_\alpha)}{\partial x_\mu}. \qquad (45,3)$$

Nous venons de comparer la valeur de $g_{\mu\nu}$ pour $x_\mu + \delta x_\mu$ dans les nouvelles coordonnées, avec sa valeur pour x_μ dans les anciennes. Nous pourrions évidemment prendre cette valeur de $\delta g_{\mu\nu}$ pour la porter dans notre intégrale si en même temps nous faisions intervenir la variation $\delta(d\tau)$. Mais nous préférons conserver $d\tau$ fixe dans la comparaison ; nous devons par conséquent comparer les valeurs des $g_{\mu\nu}$ pour le même point x_μ dans les deux systèmes. Il faut alors retrancher de la variation $\delta g_{\mu\nu}$ précédente la variation $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha$ due au changement d'intervalle. Il vient donc :

$$-\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\beta} \frac{\partial(\delta x_\beta)}{\partial x_\nu} + g_{\alpha\nu} \frac{\partial(\delta x_\alpha)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha \ ; \qquad (45,4)$$

(45,2) prend la forme :

$$\delta \int H \sqrt{-g}\, d\tau =$$

$$- \int P^{\mu\nu} \sqrt{-g} \left(g_{\mu\alpha} \frac{\partial(\delta x_\alpha)}{\partial x_\nu} + g_{\nu\alpha} \frac{\partial(\delta x_\alpha)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha \right) d\tau$$

ce qui donne, en intégrant par parties,

$$= \int \Big[\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(P^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, g_{\mu\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(P^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, g_{\nu\alpha} \right)$$

$$- P^{\mu\nu} \sqrt{-g} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \Big] \delta x_\alpha d\tau$$

$$= 2 \int \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(P^\nu_\alpha \sqrt{-g} \right) - \frac{1}{2} P^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right] \delta x_\alpha \sqrt{-g}\, d\tau$$

$$= 2 \int P^\nu_{\alpha\nu}\, \delta x_\alpha d\tau, \qquad \text{d'après (37,3).}$$

Cette expression devant s'annuler quelles que soient les variations δx_α, il en résulte :

$$P^\nu_{\alpha\nu} = 0. \tag{45,5}$$

Par conséquent, à *tout* invariant d'Univers H on peut faire correspondre un tenseur mixte du deuxième ordre P^ν_μ dont la divergence soit nulle.

Le théorème du § 38 n'est qu'un cas particulier de ce résultat général. Si en effet $H = G$ la variation de l'intégrale est d'après (44,9) :

$$\int G_{\mu\nu}\, \delta\left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\right) d\tau. \tag{45,6}$$

Or $\quad \delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) = \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \frac{\delta g}{g}$

$$= \sqrt{-g} \left(- g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right)$$

d'après (26,11) et (26,3).

En portant dans (45,6), nous avons :

$$-\int\left(G^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}G\right)\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

En comparant ce résultat avec (45,2) nous voyons que dans ce cas :

$$P^{\nu}_{\mu}=-\left(G^{\nu}_{\mu}-\frac{1}{2}g^{\nu}_{\mu}G\right) \tag{45,7}$$

et (45,5) démontre bien le théorème du § 38.

$G^{\nu}_{\mu}-\frac{1}{2}g^{\nu}_{\mu}G$ n'est pas la seule expression possédant la propriété qui nous a conduit à l'identifier avec le tenseur d'énergie, et à tout invariant d'Univers on peut faire correspondre un tenseur P^{ν}_{μ} dont la divergence soit nulle. G est le plus simple de ces invariants d'Univers ; mais nous ne devons pas perdre de vue que le tenseur de Riemann-Christoffel donne également deux autres invariants $G_{\mu\nu}\,G^{\mu\nu}$ et $B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}B^{\mu\nu\sigma}_{\varepsilon}$. Il est facile de vérifier que les tenseurs P^{ν}_{μ} correspondants contiendront les dérivées du quatrième ordre des $g_{\mu\nu}$, et que la condition d'espace vide $P^{\nu}_{\mu}=0$ deviendra un groupe d'équations différentielles du quatrième ordre. Une difficulté proviendrait alors des conditions aux limites indispensables pour déterminer la solution particulière convenant au champ d'une particule.

Par différentiation covariante, on peut encore former d'autres invariants, par exemple $g^{\sigma\tau}(G)_{\sigma\tau}$, où $(G)_{\sigma\tau}$ est la dérivée covariante seconde de G.

Nous avons fait appel à des raisons de simplicité pour justifier notre choix de la loi de gravitation ; en fait, la question de l'identification rigoureuse du tenseur d'énergie est loin d'être définitivement tranchée.

46. Résumé.

Dans cette section, nous avons fondé notre théorie sur une identification du tenseur d'énergie de la matière (quantité fournie par l'expérience) avec un tenseur d'Univers particulier. Cette identification a été faite de manière que les lois de con-

servation de l'énergie et de la quantité de mouvement se trouvent automatiquement vérifiées. Nous en avons déduit sans autre hypothèse la loi de gravitation et le mouvement géodésique d'une particule, problèmes dont nous nous étions déjà occupés dans la Section III ; il nous a été possible alors d'identifier la constante d'intégration m rencontrée dans cette section avec la masse d'inertie. Dans le dernier paragraphe nous avons vu que d'autres identifications du tenseur d'Univers étaient en apparence possibles, mais que les lois en dérivant devaient être extrêmement compliquées.

Des résultats moins importants sont l'interprétation des symboles à trois indices en tant que forces ; la propagation de la gravitation avec la vitesse de la lumière ; enfin l'abandon du principe de moindre action comme loi de l'Univers réel, du moins en ce qui concerne les phénomènes continus.

SECTION V.

ÉLECTRICITÉ.

47. Les équations électromagnétiques.

Dans la théorie habituelle le champ électromagnétique est défini par un potentiel scalaire Φ et un potentiel vecteur (F, G, H). La force électrique (X, Y, Z) et la force magnétique (α, β, γ) sont données par les équations :

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \text{etc.} \\ \alpha &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (47,1)$$

Dans cette théorie habituelle, on néglige l'action possible de la gravitation sur les phénomène électromagnétiques de sorte que les définitions précédentes et les équations de Maxwell sont relatives au cas où il n'y a pas de champ de force, c'est-à-dire aux coordonnées galiléennes.

Prenons un certain système de coordonnées galiléennes et posons :

$$(-F, -G, -H, \Phi) = k_\mu, \qquad (47,2)$$

k_μ étant considéré comme un vecteur covariant, hypothèse que nous sommes en droit de faire d'après le § 12 ; seulement, nous ne devons pas opérer, sans la discuter sérieusement, l'identification physique de k_μ dans un système de coordonnées autre que celui qui a été choisi.

D'après (21,1) :

$$k_{\mu\nu} - k_{\nu\mu} = \frac{\partial k_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial k_\nu}{\partial x_\mu}. \qquad (47,3)$$

Le premier membre est un tenseur que nous désignerons par $F_{\mu\nu}$. Dans notre système de coordonnées particulier :

$$F_{14} = \frac{\partial k_1}{\partial x_4} - \frac{\partial k_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = X$$

et l'on peut effectuer de la même manière l'identification des autres composantes. Nous en tirons l'interprétation suivante de $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{matrix} 0, & -\gamma, & \beta, & -X, \\ \gamma, & 0, & -\alpha, & -Y, \\ -\beta, & \alpha, & 0, & -Z, \\ X, & Y, & Z, & 0. \end{matrix} \qquad (47,41)$$

$\rightarrow \mu$, $\downarrow \nu$

Servons-nous des valeurs galiléennes des $g^{\mu\nu}$ pour faire passer en haut les indices :

$$F^{\mu\nu} = \begin{matrix} 0, & -\gamma, & \beta, & X, \\ \gamma, & 0, & -\alpha, & Y, \\ -\beta, & \alpha, & 0, & Z, \\ -X, & -Y, & -Z, & 0. \end{matrix} \qquad (47,42)$$

Soient ρ la densité de charge électrique, (u, v, w) la densité de courant ; posons :

$$(u, v, w, \rho) = J^{\mu} \qquad (47,5)$$

en considérant J^{μ} comme un vecteur contrevariant.

Avec cette notation, les équations de Maxwell sont les suivantes :

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \qquad (47,61)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial t} + u, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial t} + v, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial t} + w, \qquad (47,62)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \rho, \qquad (47,63)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0, \qquad (47,64)$$

en prenant la vitesse de la lumière pour unité et en faisant usage du système d'unités d'Heaviside-Lorentz, qui fait disparaître le facteur 4π (nous n'avons pas besoin de nous embarrasser du pouvoir inducteur spécifique et de la perméabilité magnétique qui n'ont d'autre utilité que de conduire aux équations macroscopiques).

Si nous nous reportons à (47,41) et à (47,42) nous voyons que ces équations peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \qquad (47,71)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J^\mu , \qquad (47,72)$$

la première de ces deux équations comprenant (47,61) et (47,64), la deuxième (47,62) et (47,63).

En substituant à $F_{\mu\nu}$ sa valeur $\frac{\partial k_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial k_\nu}{\partial x_\mu}$ dans (47,71), cette équation se trouve identiquement vérifiée. Quant à (47,72), c'est la forme réduite pour les coordonnées galiléennes de l'équation $F^{\mu\nu}_\nu = J^\mu$.

Les lois de la théorie électromagnétique prennent donc les formes simples :

$$F_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - k_{\nu\mu}, \qquad (47,81)$$

$$F^{\mu\nu}_\nu = J^\mu , \qquad (47,82)$$

et ce sont là des équations covariantes.

Si un observateur adopte un espace et un temps différents (mais toujours galiléens), les vecteurs transformés obéiront encore aux mêmes lois qu'avant leur transformation. Comme les $F_{\mu\nu}$ et les J^μ transformés auront toutes les propriétés de la force électromagnétique et du courant, il les regardera comme la force électromagnétique et le courant eux-mêmes. La relation qui existe entre les valeurs de la force électromagnétique $F_{\mu\nu}$ dans les deux systèmes est la même que celle que l'on rencontre dans la loi de transformation des tenseurs covariants et il est facile de montrer qu'elle est en parfait accord

avec les formules trouvées par Larmor et Lorentz dans le cas particulier de la transformation de Lorentz.

Si la vitesse de la charge électrique est $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ l'équation (47,5) devient :

$$\begin{aligned} J^\mu &= \rho\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dt}{dt}\right) \\ &= \rho\,\frac{ds}{dt}\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{dt}{ds}\right). \end{aligned} \qquad (47,85)$$

La parenthèse représentant un vecteur contrevariant, $\rho\,\frac{ds}{dt}$ doit être un invariant. Si maintenant nous faisons intervenir la contraction de volume de Fitzgerald $\left(\frac{ds}{dt}\right)$, nous voyons que $\rho\,\frac{ds}{t}$ n'est autre que la charge totale par unité de *volume propre*. La charge totale du volume propre est donc invariante. Différant par là de la masse, la charge électrique d'une particule ne dépend pas de son mouvement relatif par rapport à l'observateur qui la mesure (comparer ce résultat avec (39,15) où le facteur $\frac{ds}{dt}$ entre par son carré).

La covariance des équations (47,81) et (47,82) rend la théorie applicable à tous les systèmes possibles de coordonnées, de sorte que rien ne s'oppose à la présence d'un champ de force (artificiel ou naturel). Dans ce cas l'observateur effectuera l'identification physique de $F_{\mu\nu}$ et de J^μ comme si les coordonnées étaient galiléennes et il attribuera toutes les divergences observées à l'action du champ de gravitation sur les phénomènes électromagnétiques. La déviation de la lumière au voisinage du Soleil doit pouvoir se déduire de ces équations générales.

La divergence $F^\nu_{\mu\nu}$ peut être simplifiée si l'on tient compte de (37,6) puisque $F^{\mu\nu}$ est symétrique gauche :

$$F^{\mu\nu}_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right). \qquad (47,91)$$

Introduisons les densités tensorielles :

$$\mathfrak{J}^\mu = \mathfrak{F}^{\mu\nu}_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\,\mathfrak{F}^{\mu\nu} \qquad (47,92)$$

puis :

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathfrak{J}^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} \mathfrak{F}^{\mu\nu} = 0$$

parce que $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ est symétrique gauche. De là on tire d'après (37,2) :

$$J^\mu_\mu = 0. \tag{47,93}$$

Si l'on revient aux coordonnées galiléennes (47,5), cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

qui n'est autre que l'expression de la loi de conservation de l'électricité.

48. Effets mécaniques de l'électromagnétisme.

Dans la théorie habituelle la force mécanique de nature électromagnétique qui agit sur l'unité de volume contenant charges électriques et courants, a pour composantes :

$$\begin{aligned} P &= \rho X + \gamma v - \beta w \\ Q &= \rho Y + \alpha w - \gamma u \\ R &= \rho Z + \beta u - \alpha v \end{aligned}$$

et le travail accompli par unité de temps par le courant est :

$$S = uX + vY + wZ.$$

D'après (47,41) et (47,5) ces relations s'écrivent :

$$(P, Q, R, -S) = F_{\mu\nu} J^\nu \tag{48,1}$$

ce qui montre que le premier membre est un vecteur. Désignons-le par h_μ. En coordonnées galiléennes h_μ est l'expression du gain de quantité de mouvement et de la perte d'énergie (ou de masse) subis par l'unité de volume du système matériel ; ce vecteur est donc égal à $-\frac{\partial T^\alpha_\mu}{\partial x_\alpha}$. Pour un système de coordonnées quelconque cette égalité prend la forme :

$$-\,T^{\alpha}_{\mu\alpha} = h_{\mu} = F_{\mu\nu} J^{\nu} = F_{\mu\nu} F^{\nu\sigma}_{\sigma} \,. \qquad (48,2)$$

Si la conservation de l'énergie régit les phénomènes électromagnétiques, la variation du tenseur d'énergie matériel doit être compensée par une variation de même valeur mais changée de signe d'un tenseur d'énergie électromagnétique E^{ν}_{μ}, de sorte que :

$$E^{\alpha}_{\mu\alpha} = h_{\mu} = F_{\mu\nu} F^{\nu\sigma}_{\sigma} \,. \qquad (48,3)$$

Il est, je crois, préférable de réserver la notation T^{ν}_{μ} au tenseur d'énergie *total,* matériel et électromagnétique ; dans tous les cas on a donc $T^{\nu}_{\mu\nu} = 0$. C'est ce qui crée le moins de modifications aux résultats trouvés dans la Section IV. T^{ν}_{μ} contient maintenant une partie E^{ν}_{μ} due aux champs électromagnétiques. La différence $T^{\nu}_{\mu} - E^{\nu}_{\mu}$ (qui est le T^{ν}_{μ} de l'équation (48,2)) représente le tenseur d'énergie de la matière quand il n'y a pas de champ électromagnétique. Un électron sans son champ n'étant qu'une pure abstraction, nous n'aurons guère affaire dans la suite au tenseur $T^{\nu}_{\mu} - E^{\nu}_{\mu}$. Quand il n'y a pas d'électrons présents, T^{ν}_{μ} se réduit à E^{ν}_{μ} ; c'est ainsi, par exemple, que les effets gravitationnels d'un champ électromagnétique pur sont donnés par (40,2) :

$$G^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} G = -8\pi E^{\nu}_{\mu} \,. \qquad (48,4)$$

49. Le tenseur d'énergie électromagnétique.

Le tenseur d'énergie électromagnétique est donné par :

$$E^{\sigma}_{\mu} = -F^{\sigma\alpha} F_{\mu\alpha} + \frac{1}{4} g^{\sigma}_{\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \,. \qquad (49,1)$$

Pour le vérifier, prenons la divergence des deux membres en nous rappelant que la différentiation covariante est une opération distributive comme la différentiation ordinaire, et que g^{σ}_{μ} est une constante :

$$E^{\sigma}_{\mu\sigma} = - F^{\sigma\alpha}_{\sigma} F_{\mu\alpha} - F^{\sigma\alpha} F_{\mu\alpha\sigma} + \frac{1}{4}\left(F^{\alpha\beta}_{\mu} F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta\mu}\right).$$

Les deux termes de la parenthèse étant égaux,

$$\begin{aligned} E^{\sigma}_{\mu\sigma} &= F^{\alpha\sigma}_{\sigma} F_{\mu\alpha} - F^{\sigma\alpha} F_{\mu\alpha\sigma} + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta\mu} \\ &= F^{\alpha\sigma}_{\sigma} F_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha\beta} + F^{\alpha\beta} F_{\beta\mu\alpha} + F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta\mu}\right), \end{aligned}$$

les deux premiers termes de la parenthèse n'étant que deux manières différentes d'écrire $F^{\alpha\sigma} F_{\mu\alpha\sigma}$.

Il est facile de voir maintenant que :

$$F_{\mu\alpha\beta} + F_{\alpha\beta\mu} + F_{\beta\mu\alpha} = 0 \tag{49,2}$$

(car d'après (23,3) les termes contenant les symboles à trois indices se détruisent mutuellement et l'équation se réduit à (47,71)).

Par suite :

$$E^{\sigma}_{\mu\sigma} = F_{\mu\alpha} F^{\alpha\sigma}_{\sigma} = h_{\mu},$$

et l'on retrouve bien (48,3).

Quand on substitue aux $F^{\mu\nu}$ dans (49,1) leurs valeurs galiléennes (47,41), on obtient les composantes de l'effort et de la quantité de mouvement électromagnétiques, ainsi que la densité d'énergie du champ électromagnétique (1) ; les valeurs trouvées sont en parfait accord avec celles que donne la théorie habituelle. L'énergie par exemple est :

$$\begin{aligned} E^{4}_{4} &= - F^{4\alpha} F_{4\alpha} + \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ &= X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{1}{4} \cdot 2\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - X^2 - Y^2 - Z^2) \\ &= \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

Contractons (49,1) en y faisant $\sigma = \mu$; nous obtenons :

$$E = - F^{\mu\alpha} F_{\mu\alpha} + \frac{1}{4} g^{\mu}_{\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0. \tag{49,3}$$

(1) Les composantes de l'effort constituent le tenseur de Maxwell, celles de la quantité de mouvement électromagnétique forment le vecteur de Poynting. *(Note du Trad.)*.

Le tenseur d'énergie électromagnétique n'entre pour rien dans la constitution de la densité propre T. *L'étude du champ électromagnétique ne peut rien nous apprendre sur la nature de la masse au repos.*

A première vue, ce résultat semble en contradiction avec la théorie électrique moderne de l'inertie ; mais nous ne devons pas oublier que l'existence d'une charge électrique n'est possible que grâce à des forces de cohésion [1] de nature inconnue mais qui ne font pas partie du champ électromagnétique. Nous ne pouvons donc espérer créer de la matière à partir du tenseur E_{μ}^{ν} seul. La densité ordinaire de la matière exprimée en fonction des coodonnées est sans doute complètement représentée par E_{44} ; or les tensions électromagnétiques entrent pour une part rigoureusement égale en valeur absolue mais de signe contraire à E_{44} dans la constitution de la densité propre T, de sorte que ces deux parts se détruisent mutuellement. La charge électrique ne peut exister sans des forces de cohésion rigoureusement égales et opposées aux tensions électromagnétiques ; ces forces contribuent donc à la constitution de T pour une part qui vient à son tour détruire exactement la part apportée par les tensions électromagnétiques ; en résumé, pour un électron au repos, c'est E_{44} qui se trouve rétabli pour donner la valeur finale de T. Bien que, en coordonnées galiléennes la masse au repos et la masse exprimée en fonction des coordonnées soient égales, la première naît des forces de cohésion, et la seconde des tensions électromagnétiques ; peut-être notre ignorance est-elle la cause de cette distinction subtile.

Il est à remarquer que, des considérations précédentes, nous pouvons déduire que les perturbations électromagnétiques se propagent avec la « vitesse fondamentale ». Si en effet la masse exprimée en fonction des coordonnées (M) est finie et si la masse au repos (m) est nulle, la formule (p. 180) :

$$M = m \frac{dt}{ds}$$

montre que $ds = 0$.

[1] Ce sont ces forces de cohésion que l'on désigne sous le nom de pressions de Poincaré. (*Note du Trad.*)

L'invariant :

$$\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2)$$

est ce que l'on appelle en général l'action du champ électromagnétique. Comme $E=0$, le champ électromagnétique n'entre pour rien dans la valeur de G ; cette action électromagnétique est donc indépendante de toute action matérielle ou gravitationnelle, et il n'est pas possible de l'interpréter comme une courbure d'Univers. L'action totale, somme de ces deux genres d'action sera donc (à des facteurs constants près) :

$$G+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Il est difficile de saisir le sens de cette combinaison. Mais d'après le § 44 il n'y a, semble-t-il, aucune raison d'attribuer des propriétés à l' « action totale » ; n'est-ce pas là ce que l'on pourrait attendre d'une combinaison dépourvue de toute signification ? Il se peut donc que le principe de moindre action nous ait égarés par une confusion dans la nomenclature et que les actions matérielle et électrique aient des significations essentiellement différentes (1).

50. La géométrie de Weyl.

Nous avons trouvé au § 25 que la variation d'un vecteur A_μ auquel on a fait décrire par déplacement parallèle un contour fermé limitant l'élément de surface $d\mathbf{S}^{\nu\sigma}$, est donnée par :

$$\delta A_\mu=\frac{1}{2}B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}A_\varepsilon d\mathbf{S}^{\nu\sigma}=\frac{1}{2}B_{\mu\nu\sigma\rho}A^\rho d\mathbf{S}^{\nu\sigma}, \qquad (50,1)$$

le facteur $\frac{1}{2}$ provenant de ce que dans la sommation les composantes de l'aire élémentaire apparaissent chacune deux fois, par exemple $d\mathbf{S}^{12}$ et $d\mathbf{S}^{21}$.

(1) La constante du quantum est-elle la même pour ces deux genres d'action ? Si oui, voilà qui change bien les choses. L'importance de l'action (en supposant qu'elle en ait une) semble du reste liée aux lois inconnues de la dynamique intra-atomique.

$B_{\mu\nu\sigma\rho}$ étant symétrique gauche par rapport à μ et ρ,

$$A^\mu \delta A_\mu = \frac{1}{2} B_{\mu\nu\sigma\rho} A^\mu A^\rho dS^{\nu\sigma}$$
$$= o ;$$

δA_μ est donc perpendiculaire à A_μ et la *longueur* du vecteur n'est pas modifiée (18,3). Seule sa direction a varié.

Ce changement de direction d'un vecteur qui a décrit un contour fermé n'est pas facile à concevoir (bien que ce soit là une chose connue déjà depuis longtemps des géodésiens qui opèrent sur la surface courbe de notre géoïde). Le lecteur ne nous marquera sans doute pas une extrême reconnaissance de ce que nous ne lui demandons pas d'accepter également une variation dans la longueur. L'idée, en effet, en serait à peine plus difficile à saisir. Nous venons de montrer que la longueur ne variait pas ; ce résultat paraît s'appuyer non pas sur une impossibilité logique mais sur une restriction que nous avons, par inadvertance sans doute, introduite dans les axiomes de notre géométrie.

On pourrait imaginer une géométrie dans laquelle on aurait, non pas (50,1) mais :

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} \left(B_{\mu\nu\sigma\rho} + F_{\mu\nu\sigma\rho}\right) A^\rho dS^{\nu\sigma} \qquad (50,2)$$

B étant symétrique gauche et F symétrique par rapport à μ et ρ. Tous deux doivent être symétriques gauches en ν et σ si la variation du vecteur se trouve annulée quand le circuit est décrit de nouveau, mais en sens inverse de la première fois. Le tenseur $\left(B_{\mu\nu\sigma\rho} + F_{\mu\nu\sigma\rho}\right)$ est un tenseur du type le plus général.

C'est cette géométrie plus générale qu'adopte H. Weyl ; il soumet cependant $F_{\mu\nu\sigma\rho}$ à deux conditions ; il suppose (*a*) que ce tenseur est décomposé en un produit $g_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}$ et (*b*) que $F_{\nu\sigma}$ est le rotationnel d'un vecteur. La deuxième condition est nécessaire logiquement, car la variation est déterminée non pas par la surface mais par le contour qui la limite ; par le théorème de Stokes, nous pouvons transformer l'intégrale

curviligne en une intégrale de surface, et cette dernière intégrale porte nécessairement sur un rotationnel. La deuxième condition de Weyl provient donc de ce que les différentes surfaces limitées par un contour quelconque doivent conduire à une même valeur de δA_μ .

La première condition ne présente pas ce caractère de nécessité logique. Si l est la longueur de A_μ :

$$\begin{aligned}(l + \delta l)^2 &= \left(A_\mu + \delta A_\mu\right)\left(A^\mu + \delta A^\mu\right)\\ &= A_\mu A^\mu + A^\mu \delta A_\mu + A_\mu \delta A^\mu\\ &= l^2 + 2A^\mu \delta A_\mu\end{aligned}$$

de sorte que, en tenant compte de (50,2),

$$2l\delta l = F_{\mu\nu\sigma\rho}\, A^\mu A^\rho\, d\mathbf{S}^{\nu\sigma} \quad , \tag{50,31}$$

et d'après la deuxième condition de Weyl :

$$\begin{aligned}2l\delta l &= F_{\nu\sigma}\left(g_{\mu\rho}\, A^\mu A^\rho\right) d\mathbf{S}^{\nu\sigma}\\ &= F_{\nu\sigma}\, l^2\ d\mathbf{S}^{\nu\sigma} \quad .\end{aligned} \tag{50,32}$$

Ainsi dans la théorie de Weyl, δl est proportionnel à l et ne dépend pas de la direction du vecteur ; si, au contraire, l'on n'impose aucune restriction à l'expression générale (50,2), le changement δl dépend à la fois de la direction de A_μ et de sa longueur.

La seule géométrie qui nous intéresse dans notre théorie, c'est la géométrie naturelle de l'Univers, et, que celle-ci soit la géométrie de Weyl ou la géométrie plus générale symbolisée par (50,2) le déplacement parallèle doit correspondre à une opération physique réelle. Nous n'avons pas à nous arrêter sur les précautions à observer dans le transport d'une longueur d'un point à un autre ; mais si l'on suppose ces précautions prises, la variation de longueur est la variation effective de la longueur d'une règle matérielle — d'un atome ou d'un électron — que l'on déplace d'un point à un autre. Si par exemple il existait une loi prescrivant aux dimensions de l'électron de ne dépendre que de sa position actuelle et non du chemin

suivi pour y parvenir, il nous serait impossible de regarder la géométrie de Weyl comme la géométrie naturelle de l'Univers. Nous verrons que la formule plus générale (50,31) entraîne que la variation de longueur d'une règle matérielle que l'on déplace d'un point à un autre, dépend du chemin suivi et de la manière dont s'est fait le transport ; les restrictions de Weyl, au contraire, ne font dépendre la variation que du chemin suivi et non de l'orientation de la règle pendant son déplacement. Aucun argument logique ne nous permet d'exclure le cas plus général ; ce sont des raisons expérimentales qui ont fait pencher en faveur de la théorie de Weyl.

Supposons que nous ayons en A un vecteur nul et que nous empruntions différentes routes pour l'amener en B ; d'après (50,32) sa longueur devra toujours être nulle. Dans la théorie de Weyl une longueur nulle est donc quelque chose d'absolu. D'après (50,31) au contraire la longueur à l'arrivée en B ne sera pas nulle en général et il n'existe pas de moyen unique permettant de définir en B la longueur zéro, pas plus du reste qu'il n'en existe pour y déterminer n'importe quelle autre longueur. Supposons maintenant que B émette une onde lumineuse ; comment se propagera-t-elle ? La théorie de Weyl attribue à la perturbation lumineuse une trajectoire bien définie, celle dont l'intervalle total est constamment nul. Dans la géométrie plus générale il ne subsiste pas de trajectoire absolue pour la lumière et celle-ci sera bien embarrassée pour savoir quel chemin elle devra suivre.

Dans l'état actuel de nos connaissances, il est nécessaire d'adopter la limitation de Weyl ; néanmoins, comme jusqu'ici les limitations de la géométrie qui semblaient, au moment où elles furent faites, commandées par l'expérience, sont tombées une à une, je ne puis m'empêcher de penser que cette dernière limitation finira elle aussi par subir le même sort [1].

[1] Cette prévision a été réalisée pendant que le présent Ouvrage était sous presse. L'auteur vient de développer une généralisation de la théorie de Weyl, dans laquelle la limitation dont il est question dans le texte se trouve supprimée ; ce travail a paru dernièrement dans les *Proceedings of the Royal Society* (A, vol. 99, mai 1921). La théorie généralisée donne une signification plus claire du système de jauges naturel (§ 57) et il semble que la difficulté relative au vecteur nul puisse être aisément surmontée.

51. Unité de l'Univers.

Nous avons vu au Chapitre XI que la géométrie de Weyl introduit un nouveau vecteur d'Univers (k_1, k_2, k_3, k_4), qui peut être identifié avec le vecteur électromagnétique du § 47. Les équations électromagnétiques fondamentales (47,81) et (47,82) permettent alors les identifications de $F_{\mu\nu}$ et de J^{μ} respectivement, de sorte que la force électromagnétique et la charge électrique se trouvent décrites dans le langage de la géométrie nouvelle. Toutes les entités connues en physique — espace, temps, matière, force, électricité, lumière, etc. — reçoivent des identifications qui les rattachent aux quatorze potentiels indispensables pour définir la nouvelle géométrie par l'intermédiaire de la notion d'intervalle, fondamentale dans l'Univers. Jusqu'ici nous n'avons encore trouvé aucune loi à laquelle obéisse cette géométrie de l'Univers ; elle est donc entièrement libre et comme elle varie d'une région à l'autre, nous interprétons cette variation comme l'indice d'une distribution variable de la matière et de l'électricité. Il serait difficile d'imaginer une unification plus complète de la physique, du moins tant que des quanta nous échapperont.

52. Les transformations de jauges.

Dans la théorie électromagnétique habituelle, soit :

$$F'dx + G'dy + H'dz - \Phi'dt.$$

une différentielle totale exacte ; le rotationnel de (F', G', H', — Φ') est nécessairement nul et les X', Y', Z', α', β', γ' correspondants (47,1) sont nuls également. Les potentiels F, G, H, — Φ, et F + F', G + G', H + H', — Φ — Φ', donnent donc des champs de force équivalents.

De même, si $k'_{\mu} dx_{\mu}$ est une différentielle totale k_{μ} et $k_{\mu} + k'_{\mu}$ traduisent le même état de l'Univers ; ce qui, interprété géométriquement, signifie que ces deux expressions du même état se

rapportent à des systèmes de jauges différents. La formule de la p. 212 s'écrit :

$$\frac{dl}{l} = k_\mu dx_\mu \, , \qquad (52,1)$$

de sorte que :

$$\log \frac{l}{l_0} = \int k_\mu \, dx_\mu \, . \qquad (52,2)$$

Si nous ajoutons au second membre de (52,1) une différentielle totale, nous obtenons par intégration une fonction de point arbitraire qui vient s'ajouter au second membre de (52,2) ; cette dernière équation montre que cela revient à modifier en chaque point l'unité servant à mesurer l.

Une fois choisis un système de coordonnées et un système de jauges particuliers, nous avons comme d'habitude :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \, dx_\mu \, dx_\nu .$$

Si l'unité servant à mesurer la longueur est réduite selon le rapport $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, le nombre exprimant ds se trouvera augmenté selon le rapport inverse $\sqrt{\lambda}$. Si donc nous accentuons les quantités mesurées avec la nouvelle jauge,

$$g'_{\mu\nu} \, dx_\mu \, dx_\nu = ds'^2 = \lambda ds^2 = \lambda g_{\mu\nu} \, dx_\mu \, dx_\nu ,$$

de sorte que :

$$g'_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} . \qquad (52,31)$$

Il s'ensuit que :

$$g' = \lambda^4 g , \qquad (52,32)$$

$$g'^{\mu\nu} = \lambda^{-1} g^{\mu\nu} , \qquad (52,33)$$

$$\sqrt{-g'} \, d\tau = \lambda^2 \sqrt{-g} \, d\tau . \qquad (52,34)$$

Remarquons que les coordonnées x_μ ne sont que de simples *nombres* servant à numéroter les mailles, et n'ont aucun rapport avec les jauges utilisées dans la mesure des intervalles.

Nous avons encore :

$$k_\mu dx_\mu = \frac{dl}{l} = d\ (\log l).$$

Par suite :

$$k'_\mu dx_\mu = d\big(\log\ (l\sqrt{\lambda})\big)$$
$$= k_\mu dx_\mu + \frac{1}{2}\, d\ (\log \lambda).$$

Posons :

$$\varphi = \frac{1}{2} \log \lambda\ ; \qquad (52,4)$$

il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2}\, d\ (\log \lambda) = d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\, dx_\mu\ ,$$

et que :

$$k'_\mu = k_\mu + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}, \qquad (52,51)$$

ce que l'on écrit généralement :

$$k'_\mu = k_\mu + \varphi_\mu\ . \qquad (52,52)$$

Si l'on se reporte à la définition de $F_{\mu\nu}$ on voit que :

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\ . \qquad (52,6)$$

53. Le symbole à trois indices généralisé.

Transformons comme précédemment les symboles à trois indices :

$$[\mu\nu, \sigma]' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\lambda g_{\mu\sigma})}{\partial x_\nu} + \frac{\partial(\lambda g_{\nu\sigma})}{\partial x_\mu} - \frac{\partial(\lambda g_{\mu\nu})}{\partial x_\sigma}\right)$$
$$= \lambda[\mu\nu, \sigma] + \lambda\left(g_{\mu\sigma}\varphi_\nu + g_{\nu\sigma}\varphi_\mu - g_{\mu\nu}\varphi_\sigma\right) \text{ d'après } (52,4).$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $g'^{\sigma\alpha}$; il vient d'après (52,33) :

$$\{\mu\nu, \alpha\}' = \{\mu\nu, \alpha\} + g^{\alpha}_{\mu}\, \varphi_{\nu} + g^{\alpha}_{\nu}\, \varphi_{\mu} - g_{\mu\nu}\, \varphi^{\alpha} ,$$

et nous voyons d'après (52,52) que la quantité :

$$\{\mu\nu, \alpha\}^{*} = \{\mu\nu, \alpha\} - g^{\alpha}_{\mu}\, k_{\nu} - g^{\alpha}_{\nu}\, k_{\mu} + g_{\mu\nu}\, k^{\alpha} \qquad (53)$$

ne sera pas modifiée par un changement de jauge. Il est évidemment tout indiqué de remplacer $\{\mu\nu, \alpha\}$ par $\{\mu\nu, \alpha\}^{*}$ dans la nouvelle géométrie.

54. Invariance absolue.

Nous sommes amenés maintenant à chercher des invariants et des tenseurs qui, en plus de leurs propriétés caractéristiques à l'égard des transformations de coordonnées soient des invariants par rapport aux changements de jauge. Nous appellerons ces expressions des *invariants absolus* et des *in-tenseurs.*

Seront également utiles les invariants et les tenseurs qui dans un changement de jauge seront simplement multipliés par une certaine puissance de λ. Ce seront respectivement des *co-invariants* et des *co-tenseurs*.

Le changement de jauge n'est qu'une généralisation du changement d'unité dans les équations de la physique ; seulement, ce changement de jauge, au lieu d'avoir pour effet de multiplier les termes de l'équation par un facteur constant, introduit comme multiplicateur une fonction de point. Nous n'avons qu'une seule unité à considérer, celle de l'intervalle. Les in-tenseurs peuvent être regardés comme des quantités de dimensions nulles et les co-tenseurs comme des expressions ayant pour exposants dimensionnels des nombres entiers (positifs ou négatifs). Les dimensions des différents termes d'une équation co-tensorielle doivent être les mêmes. Nous désignerons en général par une étoile (*) les quantités indépendantes de la jauge utilisée ou covariantes (ou contrevariantes) avec celle-ci.

Voici un exemple qui fera comprendre la méthode générale.

Soit A^{ν}_{μ} un in-tenseur symétrique ; sa divergence (37,3) devient dans une transformation de jauge :

$$A''^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda^2\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(A^{\nu}_{\mu}\lambda^2\sqrt{-g}\right) - \frac{1}{2}\lambda^{-1}A^{\alpha\beta}\frac{\partial(\lambda g_{\alpha\beta})}{\partial x_\mu}$$

$$= A^{\nu}_{\mu\nu} + A^{\nu}_{\mu}\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda^2}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}A\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu}$$

$$= A^{\nu}_{\mu\nu} + 4A^{\nu}_{\mu}\varphi_\nu - A\varphi_\mu.$$

Donc l'expression :

$$^*A^{\nu}_{\mu\nu} = A^{\nu}_{\mu\nu} - 4A^{\nu}_{\mu}k_\nu + Ak_\mu \qquad (54,1)$$

n'étant pas modifiée par une transformation de jauge est un in-tenseur ; c'est cet in-tenseur qui donne la divergence de A^{ν}_{μ} dans la géométrie de Weyl.

Il est commode de regarder $g_{\mu\nu}$ comme une quantité de dimensions (ou de poids) $+1$; $g^{\mu\nu}$ est alors de dimensions -1, $\sqrt{-g}$ de dimensions $+2$ et ainsi de suite. Faire passer un indice de bas en haut ou de haut en bas diminue ou augmente les dimensions d'une unité. La différentiation ne modifie pas les dimensions.

55. Le tenseur de Riemann-Christoffel généralisé.

A (25,3) correspond :

$$^*B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = -\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\{\mu\nu,\varepsilon\}^* + \{\mu\sigma,\alpha\}^*\{\alpha\nu,\varepsilon\}^*$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\mu\sigma,\varepsilon\}^* - \{\mu\nu,\alpha\}^*\{\alpha\sigma,\varepsilon\}^*. \qquad (55,1)$$

Cette expression est bien un in-tenseur car les symboles « étoilés » sont tous indépendants de la jauge utilisée. Il nous reste à montrer que par cette généralisation nous n'avons pas détruit le caractère tensoriel ordinaire. Pour le voir, il suffit de jeter un coup d'œil sur la formule (55,4) que nous allons déduire de (55,1).

Considérons les deux premiers termes du deuxième membre de (55,1) ; pour avoir le deuxième membre tout entier il suffira de permuter ν et σ dans l'expression trouvée et de retran-

cher le résultat de cette expression. Les termes additionnels qu'introduisent les « étoiles » sont d'après (53) :

$$-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^\varepsilon_\mu k_\nu - g^\varepsilon_\nu k_\mu + g_{\mu\nu} k^\varepsilon\right)$$
$$+\left(-g^\alpha_\mu k_\sigma - g^\alpha_\sigma k_\mu + g_{\mu\sigma} k^\alpha\right)\{\alpha\nu,\ \varepsilon\}$$
$$+\left(-g^\varepsilon_\alpha k_\nu - g^\varepsilon_\nu k_\alpha + g_{\alpha\nu} k^\varepsilon\right)\{\mu\sigma,\ \alpha\}$$
$$+\left(-g^\alpha_\mu k_\sigma - g^\alpha_\sigma k_\mu + g_{\mu\sigma} k^\alpha\right)\left(-g^\varepsilon_\alpha k_\nu - g^\varepsilon_\nu k_\alpha + g_{\alpha\nu} k^\varepsilon\right)$$
$$= g^\varepsilon_\mu \frac{\partial k_\nu}{\partial x_\sigma} + g^\varepsilon_\nu \frac{\partial k_\mu}{\partial x_\sigma} - g_{\mu\nu}\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} k^\varepsilon$$
$$- k_\sigma\{\mu\nu,\ \varepsilon\} - k_\mu\{\sigma\nu,\ \varepsilon\} + g_{\mu\sigma}\{\alpha\nu,\ \varepsilon\} k^\alpha$$
$$- k_\nu\{\mu\sigma,\ \varepsilon\} - g^\varepsilon_\nu\{\mu\sigma,\ \alpha\} k_\alpha + [\mu\sigma,\ \nu] k^\varepsilon$$
$$+ g^\varepsilon_\mu k_\sigma k_\nu + g^\varepsilon_\nu k_\sigma k_\mu - g_{\mu\nu} k_\sigma k^\varepsilon$$
$$+ g^\varepsilon_\sigma k_\mu k_\nu + g^\varepsilon_\nu k_\sigma k_\mu - g_{\sigma\nu} k_\mu k^\varepsilon - g_{\mu\sigma} k^\varepsilon k_\nu - g^\varepsilon_\nu g_{\mu\sigma} k_\alpha k^\alpha$$
$$+ g_{\mu\sigma} k_\nu k^\varepsilon, \quad (55,2)$$

qui, après réduction, devient :

$$g^\varepsilon_\mu \frac{\partial k_\nu}{\partial x_\sigma} + g^\varepsilon_\nu k_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu} k^\varepsilon_\sigma$$
$$+ g^\varepsilon_\nu k_\mu k_\sigma - g^\varepsilon_\nu g_{\mu\sigma} k^\alpha k_\alpha + g_{\mu\sigma} k_\nu k^\varepsilon. \quad (55,3)$$

[Pour faire cette réduction, le lecteur n'a qu'à numéroter les termes du second membre de (55,2) de 1 à 19. Il verra que les termes ou couples de termes suivants sont symétriques en ν et σ : 5 et 8, 6, 11, 12 et 14, 13 et 17, 16. On peut laisser ces termes de côté puisqu'ils disparaissent dans l'expression complète. Quant à 4 et 10 ils donnent $-[\nu\sigma,\ \mu] k^\varepsilon$ qui est également symétrique en ν et σ et qui doit disparaître. La combinaison de 2 et de 9 donne $g^\varepsilon_\nu\, k_{\mu\sigma}$. Permutons 7 avec l'expression semblable de la partie complémentaire $-\, g_{\mu\nu}\{\alpha\sigma,\ \varepsilon\}\, k^\alpha$; combinée avec 3 cette expression donne $-g_{\mu\nu} k^\varepsilon_\sigma$.]

En terminant le calcul comme nous l'avons dit plus haut, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
{}^{*}B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} + g^{\varepsilon}_{\mu} F_{\nu\sigma} + \left(g^{\varepsilon}_{\nu} k_{\mu\sigma} - g^{\varepsilon}_{\sigma} k_{\mu\nu}\right) \\
+ \left(g_{\mu\sigma} k^{\varepsilon}_{\nu} - g_{\mu\nu} k^{\varepsilon}_{\sigma}\right) + \left(g^{\varepsilon}_{\nu} k_{\mu} k_{\sigma} - g^{\varepsilon}_{\sigma} k_{\mu} k_{\nu}\right) \\
+ \left(g^{\varepsilon}_{\sigma} g_{\mu\nu} - g^{\varepsilon}_{\nu} g_{\mu\sigma}\right) k_{\alpha} k^{\alpha} + \left(g_{\mu\sigma} k_{\nu} - g_{\mu\nu} k_{\sigma}\right) k^{\varepsilon}. \quad (55,4)
\end{aligned}
$$

Posons $\varepsilon = \sigma$ pour avoir l'in-tenseur contracté :

$$
{}^{*}G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} - 2k_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} k^{\alpha}_{\alpha} - 2k_{\mu} k_{\nu} + 2g_{\mu\nu} k_{\alpha} k^{\alpha}. \quad (55,5)
$$

Multiplions les deux membres par $g^{\mu\nu}$ (ce qui introduit l'exposant dimensionnel -1) ; nous obtenons le co-invariant :

$$
{}^{*}G = G - 6k^{\alpha}_{\alpha} + 6k_{\alpha} k^{\alpha} . \quad (55,6)\ [1]
$$

Remarquons que si nous faisons passer en bas l'indice ε de (55,4), le seul terme de ${}^{*}B_{\mu\nu\sigma\varepsilon}$ symétrique en μ et ε est $g_{\mu\varepsilon} F_{\nu\sigma}$ ce qui concorde bien avec la condition (a) de la géométrie de Weyl (§ 50).

56. Les invariants absolus.

Il n'existe pas de fonction invariante absolue des potentiels en un point mais on peut trouver, comme nous allons le voir, des densités invariantes absolues.

$\sqrt{-g}$ étant de dimensions $+2$, nous devons multiplier cette quantité par des co-invariants de dimensions -2 ; les expressions suivantes sont des densités invariantes absolues :

$$
({}^{*}G)^2 \sqrt{-g} , \quad {}^{*}G_{\mu\nu}\, {}^{*}G^{\mu\nu} \sqrt{-g} , \quad {}^{*}B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma}\, {}^{*}B^{\mu\nu\sigma}_{\varepsilon} \sqrt{-g} .
$$

(1) A part la différence de notations, cette expression est bien celle donnée par Weyl [*loc. cit.*, p. 120, (62)]. Je pense que les formules précédentes sont exactes mais je ne vois pas le moyen de les contrôler d'une manière indépendante.

Comme densité invariante absolue ne faisant intervenir que les k il y a :

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} .$$

Il existe également deux autres densités invariantes absolues basées sur le tenseur fondamental du sixième ordre. Ce sont :

$$g^{\alpha\beta} ({}^*G)_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \quad \text{et} \quad g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} ({}^*G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \sqrt{-g} .$$

Mais ces deux densités n'en sont qu'une en réalité car d'après (38,1) elles sont identiques ; enfin il est possible qu'il existe encore une autre densité invariante absolue dérivée de $B_{\mu\nu\sigma\rho\alpha\beta}$.

Ainsi le nombre des caractères d'Univers distincts dont les combinaisons dans une région donnée de l'espace et du temps peuvent s'exprimer par des nombres purs indépendants des coordonnées et des unités, est extrêmement limité et il ne dépasse sans doute pas 6.

Il est intéressant de remarquer qu'il n'y a que dans l'Univers à quatre dimensions que les tenseurs fondamentaux les plus simples donnent naissance à des densités qui soient des invariants absolus [1]. C'est une raison de plus, comme l'a dit Weyl lui-même, pour établir la réalité de l'Univers à quatre dimensions. Un Univers à un nombre impair de dimensions, ne pouvant posséder aucun caractère absolu, serait presque inconcevable.

57. La jauge naturelle.

Considérons une région finie de l'Univers ne contenant ni force de gravitation ni force électrique — où il y ait le *vide* le plus parfait que l'on puisse imaginer. S'il existe une autre région satisfaisant à la même condition, s'ensuivra-t-il que l'état intrinsèque de l'Univers en ces deux régions sera identiquement le même ? Je crois que la réponse générale serait

(1) Il faut faire exception pour l'espace à deux dimensions dans lequel il existe une densité invariante absolue très simple ${}^*G\sqrt{-g}$.

affirmative, qu'il n'existe entre ces deux états aucune différence absolue.

La géométrie de Weyl, au contraire, n'accepte pas cette identité. La densité invariante absolue $*G^2\sqrt{-g}$ peut ne pas être la même dans les deux régions ; de là une différence absolue que ne peut éliminer aucun changement de jauge ou de coordonnées. $G=0$ dans les deux régions car il ne s'y trouve pas de champ de gravitation, mais les autres termes de $*G$ (55,6) ne sont pas nécessairement identiques. La condition $k_{\mu\nu}=k_{\nu\mu}$ pour que la force électromagnétique soit nulle n'est évidemment pas suffisante pour permettre la détermination de $-6k^{\alpha}_{\alpha}+6k_{\alpha}k^{\alpha}$.

Nous voyons que les facteurs :

champ de gravitation + force électromagnétique

ne suffisent pas à déterminer l'état de l'Univers. L'ensemble :

champ de gravitation + potentiel électromagnétique

suffit au contraire. Le potentiel électromagnétique a en lui quelque chose de fondamental qui disparaît quand nous en prenons le rotationnel pour obtenir la force électromagnétique observable.

Il est à peu près certain que ce « quelque chose » est l'ensemble de ces forces de cohésion mystérieuses qui empêchent la dissociation de l'électron et qui, sans doute, apparaissent encore dans le quantum d'énergie. Le rôle de ces forces est de donner à l'électron ses dimensions et sa consistance électrique ; sans elles, celui-ci s'étendrait jusqu'à l'infini sous l'action des forces de Maxwell. Par l'intermédiaire du quantum elles peuvent également fixer les dimensions des atomes et par là elles déterminent la grandeur de tous nos instruments matériels. Or, au point de vue pratique, c'est la grandeur de ces instruments qui nous fait adopter un système de jauges particulier. Dire que le champ de gravitation est nul n'a pas de signification précise au point de vue théorique car cette assertion ne peut s'appliquer qu'à un système de jauges particulier. Pratiquement nous lui accordons un sens en le rapportant à

un système de jauges universellement reconnu que l'on définit par le transport d'instruments de mesure matériels et qui, au fond, repose donc sur les dimensions de l'électron et de l'atome.

Les résultats établis dans les Sections I-IV ne sont vrais que pour le système de jauges que nous venons de définir. Nous avons toujours supposé qu'une règle servant à mesurer les intervalles en un point A pouvait être transportée en un autre point B et qu'en ce point elle donnait une mesure correcte des intervalles ; cette hypothèse détermine un système de jauges naturel et la détermination ne présente aucune ambiguïté tant qu'il n'y a pas de champ électromagnétique présent. Nous avons vu que si, au contraire, il y a un champ électromagnétique, la définition précédente du système de jauges donne lieu à une ambiguïté qui est précisément l'objet de la théorie de Weyl. Néanmoins, pour plusieurs raisons, ce manque de précision n'a pas grande importance et, au point de vue pratique, il y a de gros avantages à adopter un système de jauges naturel approché — qui devient le système exact en l'absence du champ électromagnétique. Ce système est comparable à ce système d'inertie imprécis du Chapitre X, qui n'est défini d'une manière nette que dans l'espace-temps euclidien, mais qui est une approximation commode dans l'espace-temps non euclidien.

Ici, une question se pose : sur quelle condition allons-nous nous appuyer pour déterminer notre système de jauges naturel ? Cherchons s'il est possible de le déterminer de manière que $*G$ soit une constante en tous points. $*G$ variant en raison inverse de λ, λ se trouve partout déterminé. La quantité $*G$ est la courbure, de sorte que la condition choisie revient à supposer que tout élément d'un appareil matériel de composition déterminée, et plus simplement tout électron a pour rayon une fraction déterminée et constante du rayon de courbure de l'Univers au point où il se trouve. Il semble qu'il n'existe rien d'autre auquel ce rayon puisse se comparer. Pourtant, si l'on considère un élément matériel quelconque, il ne se conforme pas rigoureusement à la condition précédente, et la cause de cette divergence, c'est son histoire antérieure à l'égard des forces électromagnétiques qui, d'après la théorie de Weyl, ont sur ses dimensions un effet permanent.

Ceci exige évidemment que *G ne soit pas nul. L'Univers a donc une courbure finie et constante. Il est nécessaire qu'il en soit ainsi car c'est, en dernière analyse, ce rayon de courbure qui nous fixe l'étalon de longueur dont nous nous servons. La longueur la plus petite connue en physique et la longueur la plus grande — le rayon de l'électron et le rayon de l'espace — sont liées l'une à l'autre d'une manière si étroite que nous ne pouvons considérer l'une indépendamment de l'autre.

Prenons la loi de gravitation dans un Univers sphérique [1] (40,7) :

$$G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu (G - 2\lambda) = - 8\pi \, T_\mu^\nu,$$

ce qui donne par contraction :

$$G - 4\lambda = 8\pi \, T. \qquad (57,1)$$

Si maintenant nous fixons le système de jauges par la condition $^*G = 4\lambda$, d'après (55,6) nous avons :

$$G - 4\lambda = 6 \left(k_\alpha^\alpha - k_\alpha k^\alpha\right) \qquad (57,2)$$

et :

$$\rho_0 = T = \frac{3}{4\pi} \left(k_\alpha^\alpha - k_\alpha k^\alpha\right). \qquad (57,3)$$

C'est là une expression de la masse au repos de l'électron,

(1) Un Univers à courbure totale constante n'est pas nécessairement sphérique, de même qu'un Univers à courbure totale nulle n'est pas nécessairement euclidien. L'Univers sphérique entre autres conditions exige que :

$$^*G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$$

tandis que la condition de courbure totale constante est $^*G = 4\lambda$. Dans un Univers non sphérique, il me semble, l'électron ne serait pas sphérique non plus et donnerait une jauge variable avec la direction (comme dans la généralisation de la géométrie de Weyl indiquée au § 50). En pratique nous prendrions donc les équations $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ pour déterminer les jauges, et réduirions ainsi l'Univers à une forme quasi-sphérique dans le système de jauges naturel.

masse qui, rappelons-le, ne pouvait être déterminée par les seules forces électromagnétiques de Maxwell.

Le vecteur k_α est une forme possible du potentiel électromagnétique dans ce système de jauges naturel ; il n'y a évidemment aucune raison pour que le second membre de (57,3) s'annule dans un champ électromagnétique regardé, du point de vue ordinaire, comme ne contenant pas de matière. Mais le potentiel dans un pareil champ est extrêmement faible si on le compare au potentiel intérieur d'un électron. Il est probable que si ρ_0 et k_α sont mesurés en unités C. G. S., le second membre de l'expression précédente se trouve multiplié par un facteur très petit, de sorte que ρ_0 est partout négligeable sauf à l'intérieur de l'électron. En d'autres termes, nous pouvons regarder la substance de l'électron comme dépourvue de contour net et coextensive avec son champ, les parties éloignées de son centre pouvant être négligées pratiquement.

Il est à remarquer que nous choisissons $^*G = c^{te}$ et non $G = c^{te}$ comme équation de détermination de la jauge ; la raison en est que les équations fondamentales de la physique sont des équations co-tensorielles et il est évidemment tout indiqué de prendre un co-invariant comme unité de mesure.

58. Les tenseurs d'énergie électrique et matériel.

Le tenseur d'énergie électrique E_μ^ν est associé à l'invariant $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ exactement comme le tenseur total d'énergie est lié à l'invariant G (§ 45).

Si, en effet, on varie les $g^{\alpha\beta}$ en laissant les k_α constants :

$$\delta\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) = F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\ \delta\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\sqrt{-g}\right)$$

puisque $F_{\alpha\beta}$ n'est fonction que des k,

$$= F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\left(g^{\alpha\mu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\beta\nu} + g^{\beta\nu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\alpha\mu}\right) + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,\delta\left(\sqrt{-g}\right)$$

$$= 2F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\,g^{\alpha\mu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\,g_{\beta\nu}\,\delta g^{\beta\nu} \qquad (58,1)$$

d'après (26,3), et en permutant α et β, μ et ν dans le second

terme. Le coefficient de $\delta g^{\beta\nu}$ correspond à $-P_{\beta\nu}\sqrt{-g}$ dans (45,2) ; en multipliant par $g^{\beta\varepsilon}$ nous obtenons donc le tenseur mixte :

$$-\tilde{P}_\nu^\varepsilon = 2F^{\mu\varepsilon}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_\nu^\varepsilon F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} = -2E_\nu^\varepsilon \qquad (58,2)$$

d'après (49,1).

Le raisonnement qui nous a montré (§ 45) que $P_{\nu\varepsilon}^\varepsilon$ était identiquement nul, ne s'applique pas aux invariants qui sont fonctions des k_μ.

Les expressions que nous avons données pour le tenseur total d'énergie et le tenseur d'énergie électrique n'ont pas mêmes dimensions, les dimensions du premier étant —1 et celles du second —2. Il n'y a à cela rien d'étonnant puisque tout ce que nous avons dit dans la Section IV se rapportait uniquement au système de jauges naturel et que la question des dimensions n'y avait pas été soulevée. C'est un problème assez difficile de montrer la liaison intime qui unit ces deux tenseurs car il n'y a que dans le système de jauges naturel que le tenseur d'énergie soit conservatif ; autrement dit, la divergence de $G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G$ est identiquement nulle mais l'expression étoilée correspondante ne l'est pas.

59. Le problème de la matière.

Au point où nous en sommes arrivés maintenant, la théorie de la relativité ne va plus pouvoir nous guider que d'une manière très incertaine. Je ne dis pas que les résultats que nous allons énoncer sont vrais dans tous leurs détails et il est probable que nous n'avons pas encore trouvé le fil directeur qui nous conduira à la connaissance de la structure de la matière et de l'électron. Néanmoins, les relations que nous fournit l'analyse ont sans doute un sens et elles semblent donner une indication sur la signification profonde des résultats exposés au cours de ce Livre.

Considérons la densité invariante absolue :

$$^*G_{\mu\nu}\,^*G^{\nu\mu}\sqrt{-g}\,,$$

qui est peut-être le moins artificiel des invariants absolus. Si dans (55,5) nous écrivons :

$$2k_{\mu\nu} = (k_{\mu\nu} + k_{\nu\mu}) + (k_{\mu\nu} - k_{\nu\mu}) = (k_{\mu\nu} + k_{\nu\mu}) + F_{\mu\nu}\,,$$

nous voyons que :

$$^*G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 2F_{\mu\nu}\,, \qquad (59,1)$$

où $R_{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique et $F_{\mu\nu}$ un tenseur symétrique gauche.

Par suite :

$$\begin{aligned} ^*G_{\mu\nu}\,^*G^{\nu\mu}\sqrt{-g} &= R_{\mu\nu}R^{\nu\mu}\sqrt{-g} + 4F_{\mu\nu}F^{\nu\mu}\sqrt{-g} \\ &= R_{\mu\nu}R^{\nu\mu}\sqrt{-g} - 4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}. \qquad (59,2) \end{aligned}$$

Il n'y a pas de termes rectangles du fait que $F_{\mu\nu}$ est symétrique gauche.

Posons [1] :

$$\mathfrak{A} = {}^*G_{\mu\nu}\,^*G^{\nu\mu}\sqrt{-g}\,. \qquad (59,3)$$

Nous allons maintenant admettre un principe d'action stationnaire :

$$\delta\int \mathfrak{A}\, d\tau = 0$$

pour des variations très petites de l'Univers $(\delta g_{\mu\nu}, \delta k_{\mu})$, nulles à la limite de la région considérée.

Pour la première fois nous introduisons ici une loi objective de l'Univers. Un pareil genre de loi est indispensable si nous voulons trouver la structure de l'atome et ceci justifie l'appel que nous faisons à une loi de la nature. Mais actuellement, nous ne pouvons guère affirmer autre chose que l'importance que

(1) Nous adoptons cet invariant absolu car il nous paraît plus naturel que l'expression $^*G^2\sqrt{-g} - \beta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}$ discutée par Weyl ; nos résultats néanmoins sont pratiquement les mêmes que les siens.

présente $\delta\mathcal{A}$ pour la structure atomique, et le fait d'écrire que cette expression est nulle ne doit être regardé que comme un artifice momentané.

Considérons d'abord la variation de $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}$:

$$= R_{\mu\nu}\delta\left(R^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) + R^{\mu\nu}\,\delta\left(R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) - R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\delta\left(\sqrt{-g}\right). \quad (59,51)$$

Déterminons le système de jauges de telle sorte que :

$$R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}\,, \qquad (59,52)$$

où λ est une constante. Nous prenons $R_{\mu\nu}$ et non pas $^*G_{\mu\nu}$ car ce dernier tenseur n'étant pas symétrique ne pourrait être posé égal à $\lambda g_{\mu\nu}$. Remarquons encore que $R_{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu}$ sont tous deux des in-tenseurs mais que $G_{\mu\nu}$ ne l'est pas. Cette détermination du système de jauges nous donne un Univers quasi-sphérique [1] ; c'est une hypothèse admissible d'après ce que nous avons dit dans la note du § 57 (p. *134*). D'après (59,1) et (59,2) nous avons alors :

$$4\lambda = R = {}^*G = G - 6k^{\alpha}_{\alpha} + 6k_{\alpha}k^{\alpha}\,. \qquad (59,53)$$

D'où en portant dans (59,51) :

$$\delta\left(R_{\mu\nu}\,R^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) = \lambda\left[g_{\mu\nu}\,\delta\left(R^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) + g^{\mu\nu}\,\delta\left(R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)\right] - 4\lambda^2\,\delta\left(\sqrt{-g}\right)$$

$$= 2\lambda\delta\left(R\sqrt{-g}\right) - 4\lambda^2\delta\left(\sqrt{-g}\right) \qquad (59,54)$$

$\left(\text{puisque } g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} = 0\right)$

$$= 2\lambda\delta\left(G\sqrt{-g}\right) - 12\lambda\delta\left(k^{\alpha}_{\alpha}\sqrt{-g}\right) + 12\lambda\delta\left(k_{\alpha}k^{\alpha}\sqrt{-g}\right) - 4\lambda^2\delta\left(\sqrt{-g}\right) \qquad (59,55)$$

d'après (59,53).

[1] Autrement dit, les $G_{\mu\nu}$ ont les mêmes valeurs que dans un Univers sphérique mais il n'en est pas nécessairement de même pour les $B_{\mu\nu\sigma\rho}$.

D'autre part :

$$\delta\left(k^{\alpha}_{\alpha}\sqrt{-g}\right) = \delta\left[\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(k^{\alpha}\sqrt{-g}\right)\right] \quad \text{d'après (37,1).}$$

Ce terme n'intervient pas dans la valeur de (59,4) car, par intégration, il fournit une intégrale de surface étendue à la limite de la région et sur cette limite les variations sont toutes nulles. Donc :

$$\delta\int \mathcal{A}\, d\tau = \int\Big[2\lambda\delta(\mathrm{G}\sqrt{-g}) + 12\lambda\delta\left(k_{\alpha}k^{\alpha}\sqrt{-g}\right) - 4\lambda^{2}\delta(\sqrt{-g}) - 4\delta\left(\mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)\Big]\, d\tau\,; \qquad (59,61)$$

nous avons à mettre cette expression sous la forme :

$$\delta\int \mathcal{A}\, d\tau = \int\left(\mathrm{P}^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g_{\mu\nu} + \mathrm{Q}^{\mu}\sqrt{-g}\,\delta k_{\mu}\right) d\tau, \qquad (59,62)$$

et il résultera de la loi que nous avons admise que :

$$\mathrm{P}^{\mu\nu} = 0, \qquad \mathrm{Q}^{\mu} = 0. \qquad (59,63)$$

La plus grosse partie de la détermination de $\mathrm{P}^{\mu\nu}$ a déjà été exposée aux §§ 44-45 et au § 58. Quand on fait varier les $g_{\mu\nu}$, on a :

$$\begin{aligned}\delta\left(k_{\alpha}k^{\alpha}\sqrt{-g}\right) &= k_{\alpha}k_{\mu}\delta\left(g^{\mu\alpha}\sqrt{-g}\right)\\ &= k_{\alpha}k_{\mu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\alpha} + k_{\sigma}k^{\sigma}\delta(\sqrt{-g})\\ &= -k^{\alpha}k^{\mu}\sqrt{-g}\,\delta g_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}k_{\sigma}k^{\sigma}\sqrt{-g}\,g^{\mu\alpha}\delta g_{\mu\alpha}.\end{aligned}$$

De même :

$$\lambda^{2}\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\lambda^{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

De là nous tirons :

$$\mathrm{P}^{\mu\nu} = -2\lambda\left(\mathrm{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathrm{G}\right) + 12\lambda\left(-k^{\mu}k^{\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}k_{\alpha}k^{\alpha}\right) - 2\lambda^{2}g^{\mu\nu} - 8\mathrm{E}^{\mu\nu},$$

de sorte que :

$$P^\nu_\mu = -2\lambda\left[G^\nu_\mu - \frac{1}{2} g^\nu_\mu (G - 2\lambda)\right]$$
$$+ 12\lambda\left(-k_\mu k^\nu + \frac{1}{2} g^\nu_\mu k_\alpha k^\alpha\right) - 8E^\nu_\mu$$
$$= 16\pi\lambda T^\nu_\mu - 8E^\nu_\mu + 12\lambda\left(-k_\mu k^\nu + \frac{1}{2} g^\nu_\mu k_\alpha k^\alpha\right) \qquad (59,7)$$

en utilisant la formule (40,7). Si nous le préférons, nous pouvons mettre à part le terme $-2\lambda^2 g^\nu_\mu$ et le regarder comme une sorte d' « énergie cosmique » due à la courbure naturelle de l'Univers.

D'après (59,63) nous devons poser (59,7) égal à o. Il s'ensuit que :

$$2\pi\lambda T^\nu_\mu = E^\nu_\mu + \frac{3}{2}\lambda\left(k_\mu k^\nu - \frac{1}{2} g^\nu_\mu k_\alpha k^\alpha\right), \qquad (59,81)$$

équation qui nous montre que l'énergie totale est formée de l'énergie électrique et d'une partie non maxwellienne de forme relativement simple. A l'extérieur des électrons, cette dernière est suffisamment petite pour qu'on puisse la négliger et l'on a :

$$2\pi\lambda T^\nu_\mu = E^\nu_\mu, \qquad (59,82)$$

ce qui nous donne la relation entre les unités de T^ν_μ et celles de E^ν_μ.

En unités C. G. S., le facteur λ est au plus égal à 10^{-50} ; ceci explique la raison pour laquelle dans un champ électromagnétique d'intensité moyenne le terme E^ν_μ est seul appréciable.

Faisons maintenant varier les k_μ dans (59,61). Cette variation n'affecte que le second et le quatrième termes :

$$\delta\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right) = 2\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu}$$
$$= 2\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}\left[\frac{\partial(\delta k_\mu)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial(\delta k_\nu)}{\partial x_\mu}\right]$$

$$= 4\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu} \frac{\partial(\delta k_\mu)}{\partial x_\nu}$$

$$= -4 \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)\delta k_\mu + 4\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta k_\mu\right).$$

Inutile de tenir compte de la dérivée exacte car dans l'intégration elle donne une intégrale de surface étendue à la limite de la région ; d'après (47,91), la variation est donc égale à :

$$-4F^{\mu\nu}_{\nu}\sqrt{-g}\,\delta k_\mu .$$

D'autre part :

$$\delta\left(k_\alpha k^\alpha \sqrt{-g}\right) = 2k^\alpha \sqrt{-g}\,\delta k_\alpha .$$

Par conséquent dans (59,62) :

$$Q^\mu = 24\lambda k^\mu + 16F^{\mu\nu}_{\nu}, \qquad (59,91)$$

et la loi admise $Q^\mu = 0$ donne :

$$-\frac{3}{2}\lambda k^\mu = F^{\mu\nu}_{\nu} = J^\mu \qquad (59,92)$$

d'après (47,82). Nous voyons que, si elle est vraie, la loi est remarquablement simple.

Comme $J^\mu_\mu = 0$ (47,93), il en résulte que $k^\mu_\mu = 0$, et (57,3) devient :

$$\rho_0 = -\frac{1}{3\pi\lambda^2} J_\mu J^\mu . \qquad (59,93)$$

Le même résultat s'obtient par contraction de (59,81). Comme nous savons par l'expérience que ρ_0 est positif, il s'ensuit que le carré de la longueur du vecteur J_μ est négatif. A l'intérieur de l'électron le vecteur « charge et courant » serait donc un vecteur dans l'espace.

Le résultat le plus important de toute cette analyse, c'est l'équation (59,82), et je crains fort que tout le reste n'ait pas grande signification au point de vue physique. Dans l'ancienne théorie, l'électron était une région très petite possédant une courbure très grande. Nous avons au contraire, en choi-

sissant convenablement une nouvelle jauge, ramené cette courbure à avoir la même valeur que partout ailleurs. Comme nous n'avons pas la moindre idée sur la manière pratique d'effectuer des mesures à l'intérieur de l'électron, nous ne voyons pas quelle peut être la signification physique du processus adopté. Avec la nouvelle jauge, des potentiels extrêmement intenses font leur apparition — incomparablement plus grands que ceux que présente le champ électrique immédiatement extérieur à l'électron. Ces potentiels ne disparaîtraient pas entièrement avec l'ancienne jauge, mais ils auraient des valeurs beaucoup plus faibles. Dans l'électron, k^μ est en majeure partie la dérivée d'un scalaire ; il forme donc dans les problèmes statiques un vecteur dans l'espace. Bien que dans (59,92) cette partie principale de k^μ ait été identifiée avec un vecteur « courant et charge électriques » J^μ, nous ne savons pas ce que signifie le fait que ce vecteur est un vecteur dans l'espace. Ces résultats paraissent surtout être une forme nouvelle donnée à nos connaissances, forme qui nous montre plus clairement la continuité des phénomènes quand on passe de l'intérieur à l'extérieur de l'électron.

60. Valeurs numériques.

Les résultats du § 59 sont assez douteux mais nous pouvons, je crois, regarder comme exacte l'équation (59,82) :

$$2\pi\lambda T_\mu^\nu = E_\mu^\nu , \tag{60,1}$$

applicable au champ électromagnétique extérieur aux électrons. Quoi qu'il en soit cette équation donne des valeurs numériques d'un ordre de grandeur acceptable.

Nous allons avoir à choisir une valeur de λ. Le rayon de courbure de l'espace R peut être pris égal à $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ en laissant de côté un facteur numérique sans importance variant légèrement avec la définition adoptée pour R. Comme limite inférieure de R, nous prendrons 10^{25} cm. (il existe à notre con-

naissance des amas globulaires à une distance de l'ordre de 10^{24} cm. de sorte que la valeur minimum adoptée pour R est sûrement trop petite). Nous aurons donc $\lambda = 10^{-50}$ cm^{-2}.

Considérons un champ électrostatique de 1.500 volts par cm, c'est-à-dire 5 unités électrostatiques C. G. S. La densité d'énergie est $\frac{5^2}{8\pi}$ ou approximativement 1 erg par cm^3. La masse de cette énergie s'obtient en divisant la valeur précédente par le carré de la vitesse de la lumière, ce qui donne :

$$\frac{1}{9} \times 10^{-20} \text{ gr. par cm}^3.$$

Pour transformer cette valeur en unités gravitationnelles, rappelons que :

Masse du Soleil $= 1{,}94 \times 10^{33}$ gr. $= 1{,}47 \times 10^5$ cm. (valeur gravitationnelle).

La masse gravitationnelle T^4_4, de notre champ électrique est donc :

$$8{,}4 \times 10^{-50} \text{ cm. par cm}^3.$$

Donc d'après (60,1) :

$$E^4_4 = 5{,}3 \times 10^{-99} \text{ cm}^{-4}.$$

Pour un champ statique dirigé suivant l'axe des x, en coordonnées galiléennes nous avons :

$$E^4_4 = \frac{1}{2} F^2_{14}$$

ce qui donne $F_{14} = 10^{-49}$ approximativement, en fonction du centimètre. Or nous avons vu que F_{14} était indépendant de la jauge, de dimensions nulles par conséquent, mais qu'il dépendait du système de coordonnées choisi. Le centimètre n'est donc pas ici une unité de jauge ; c'est l'unité qui donne la distance des différentes lignes coordonnées x, y, z. Dans la théorie ordinaire c'est là une distinction parfaitement illusoire (¹).

(¹) Prendre des coordonnées galiléennes c'est choisir la « distance » de

Prenons deux règles matérielles de longueur l et à δx_1 cm. l'une de l'autre ; maintenons-les à une différence de potentiel δk_4 pendant un temps δx_4 (centimètres). Comparons leurs longueurs au début et à la fin de l'expérience. Leurs lignes d'Univers dans l'espace-temps définiront un rectangle ayant pour aire $\delta x_1 \delta x_4$ cm², et d'après la théorie de Weyl, il y aura entre elles à la fin de l'expérience une différence de longueur donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\delta l}{l} &= F_{14}\, \delta x_1\, \delta x_4 \\ &= -\frac{\partial k_4}{\partial x_1}\, \delta x_1\, \delta x_4 \\ &= -\,\delta k_4\, \delta x_4. \end{aligned}$$

Notre calcul nous a montré que pour une différence de potentiel de 1.500 volts nous devions prendre $\delta k_4 = 10^{-49}$, δx_4 étant mesuré en centimètres. Nous pouvons donc évaluer numériquement $\frac{\delta l}{l}$. Si nos règles ont au début 1 m. de longueur et sont maintenues pendant 1 an (1 année de lumière $= 10^{18}$ cm.) à une différence de potentiel de 1,5 millions de volts :

$$\begin{aligned} \delta l &= 100 \times 10^3 \times 10^{-49} \times 10^{18} \text{ cm.} \\ &= 10^{-26} \text{ cm.} \end{aligned}$$

Si le rayon de courbure de l'Univers est supérieur à 10^{25} cm., cette différence de longueur sera plus petite, ces deux quantités variant en raison inverse l'une de l'autre. Les changements de longueur produits par les champs électromagnétiques sont donc loin d'être observables expérimentalement.

Nous avons vu précédemment que 1 erg par cm³ était égal à :

$$5{,}3 \times 10^{-99} \text{ cm.}^{-4} \text{ en unités absolues.}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1 \text{ erg} &= 5{,}3 \times 10^{-99} \text{ cm.}^{-1} \\ &= 1{,}8 \times 10^{-89} \text{ sec.}^{-1} \end{aligned}$$

deux lignes coordonnées consécutives égale à l'intervalle unité ; en coordonnées quelconques, cette distance des lignes coordonnées diffère généralement de la jauge unité.

Par suite :

$$1 \text{ erg-seconde} = 1,8 \times 10^{-89} \text{ unités d'action absolues.}$$

D'autre part le quantum est égal à $6,55 \times 10^{-27}$ erg.-sec. Par conséquent :

$$1 \text{ quantum} = 10^{-115}$$

ou un nombre plus petit si le rayon de courbure de l'Univers est plus grand, ces deux quantités étant encore inversement proportionnelles l'une à l'autre. Nous devons donc renoncer à l'espoir d'indentifier le quantum avec l'unité naturelle d'action.

Nous ne poursuivrons pas plus loin cette analyse. La théorie de la relativité, confrontée avec les problèmes de l'électron et du quantum, est arrêtée à l'heure actuelle par les difficultés mêmes auxquelles se sont heurtées ces questions ; toutefois, en attendant de nouveaux progrès, c'est une grosse consolation pour nous d'entrevoir la perspective des développements physiques si passionnants qu'elle suggère.

LAVAL. — IMPRIMERIE L. BARNÉOUD ET Cie.

